確率微分方程式 (共立講座 数学の輝き 谷口説男著)
演習問題解答

ゆじ

2025 年 11 月 1 日

概要

このノートは谷口説男氏による著書「確率微分方程式 (共立講座 数学の輝き) 」の演習問題の解答を書いたものです。いくつかの問題は解いていません。

2025.11.01. 公開用に、少しだけ手を加えました (といっても、すでに公開されているものではあったのですが)。常識的な範囲内で自由に使っていただければと思っています。

目次

1 確率論の基礎概念 2

2 マルチンゲール 7

3 ブラウン運動 10

4 確率積分 18

5 確率微分方程式 (I) 26

6 確率微分方程式 (II) 37

7 経路空間での微積分学 48

1　確率論の基礎概念

練習問題 1.1. $\sigma(\mathcal{A})$ は σ-加法族であることを示せ。

解答. 任意の $\mathcal{G} \in \Lambda(\mathcal{A})$ は σ-加法族であるから $\varnothing, \Omega \in \mathcal{G}$ であり、従ってとくに $\varnothing, \Omega \in \sigma(\mathcal{A})$ である。

$A \in \sigma(\mathcal{A})$ とする。任意の $\mathcal{G} \in \Lambda(\mathcal{A})$ は σ-加法族であり、$A \in \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$ であるから、$\Omega \setminus A \in \mathcal{G}$ となって、とくに $\Omega \setminus A \in \bigcap \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ となる。

$A_i \in \sigma(\mathcal{A}), i = 1, 2, \cdots$ とする。任意の $\mathcal{G} \in \Lambda(\mathcal{A})$ は σ-加法族であり、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$ であるから、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$ となって、とくに $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ となる。以上で全ての条件が確認できた。

練習問題 1.2. 例 1.5(2) の $\mathbf{P}$ が確率測度であることを確認せよ。

解答.

$$\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathbf{1}_{\Omega}(i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

であるので $\mathbf{P}$ は一つ目の条件を満たす。また $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \cdots$ がたがいに交わらないとき、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}(i) = 1 \\
\iff\ & i \in \textstyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \\
\iff\ & \text{ある } j = 1, 2, \cdots \text{ で } i \in A_j \\
\iff\ & \text{ただ一つの } j \text{ で } i \in A_j \\
\iff\ & \text{ただ一つの } j \text{ で } \mathbf{1}_{A_j}(i) = 1
\end{aligned}$$

となる。ただし 3 つ目の $\iff$ は A_j たちがたがいに交わらないことより従う。以上より

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_j}(i)$$

となって、

$$\mathbf{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_j}(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_j}(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j)$$

となる。よって $\mathbf{P}$ は二つ目の条件も満たす。以上で $\mathbf{P}$ は確率測度となる。

練習問題 1.3. E, E_1, E_2 を可分距離空間とし、d を E 上の距離関数とする。

(1) $E_1 \times E_2$ のボレル σ-加法族 $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ は $\sigma(\{A_1 \times A_2 | A_i \in \mathcal{B}(E_i), i = 1, 2\})$ と一致することを示せ。
(2) E-値確率変数 X, Y に対し $d(X, Y)$ は確率変数となることを示せ。

解答. (1)。まず $E_1 \times E_2$ の開集合 U は

$$U = \bigcup (U_1 \times U_2)$$

と書ける。ただし U_i は E_i の開集合であり和は $U_1 \times U_2 \subset U$ となるペア (U_1, U_2) すべてに渡る。ここで E_1, E_2 は可分であるから、$E_1 \times E_2$ は第二可算であり、従って可算個のペア (U_1, U_2) をとることで U は上の形のある可算和として表すことができる。すると各 $U_1 \times U_2$ は $\sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{B}(E_i), i = 1, 2\})$ に属す

るから、その可算和である U もそこに属することがわかる。$\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ が開集合系で生成された σ-加法族であることから、以上より、

$$\mathcal{B}(E_1 \times E_2) \subset \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{B}(E_i), i = 1, 2\})$$

がわかる。

$A_i \in \mathcal{B}(E_i)$ に対して $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ であるから逆の包含もわかる。以上で示された。

(2) X, Y を並べて得られる $X \times Y : \Omega \to E$ は E-値確率変数であり、また距離関数 $d(-,-)$ は連続関数であり、連続関数は可測関数であるから、以上より d と $X \times Y$ の合成である $d(X, Y)$ は確率変数となる。

練習問題 1.4. 確率変数 X_n が X に確率収束し、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であれば、$f(X_n)$ は $f(X)$ に確率収束することを示せ。

解答. $\varepsilon > 0$ を任意にとる。$A_n :\overset{\text{def}}{=} \{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\}$ とおく。示したいことは次である：

$$\mathbf{P}(A_n) \to 0, \quad (n \to \infty).$$

$\delta > 0$ をとる。

$$B_\delta :\overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y, |x - y| < \delta \text{かつ} |f(x) - f(y)| > \varepsilon\right\}$$

とおく。また、$C_n(\delta) :\overset{\text{def}}{=} \{|X_n - X| \geq \delta\}$ とおく。これらの定義から、任意の $\delta > 0$ に対して

$$A_n \subset \{X \in B_\delta\} \cup C_n(\delta)$$

となることがわかる。次に注意：

(1) f は連続なので、$\bigcap_{\delta > 0} B_\delta = \varnothing$ であり、従って $\lim_{\delta \to 0} \mathbf{P}(X \in B_\delta) = 0$ となる。
(2) X_n は X に確率収束するので、任意の $\delta > 0$ に対して $\mathbf{P}(C_n(\delta)) \to 0, (n \to \infty)$ となる。

以上より

$$\mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(X \in B_\delta) + \mathbf{P}(C_n(\delta)) \to 0, \quad (n \to \infty, \delta \to 0)$$

となって所望の結果を得る。

練習問題 1.5. $\mathcal{F}$ を σ-加法族、$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を有限な σ-加法族とする。このとき、$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{G}$ があって次を満たす：

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing, (i \neq j)$.
(2) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

さらに $\mathbf{P}(A_i) > 0$ と仮定する。このとき、ある $X \in L^1(\mathbf{P})$ が存在して

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X; A_i]}{\mathbf{P}(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}$$

となることを示せ。

解答. なんかこの問題は「A_i たちに対する最小性」のようなものがないとまずい気がする。たとえば $n = 1, A_1 = \Omega$ とかは二つの条件を満たして、しかも $\mathbf{P}(A_1) = 1$ になるけど $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ で一定になっ

て、これはすごくまずい気がする。というわけでここではそのような A_i たちであって最小のものをとってくることで最後の等式が成立するようにできることを示す。

まず Ω に同値関係を入れる：

$$\omega_1 \sim \omega_2 :\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall A \in \mathcal{G}, \omega_1, \omega_2 \in A \text{ または} \omega_1, \omega_2 \in \Omega \setminus A.$$

明らかに $\sim$ は Ω 上の同値関係であり、$\mathcal{G}$ が有限集合であることから、Ω は有限個の同値類 $A_1, \cdots, A_n$ に分割される。しかも A_i は A_i を含む $\mathcal{G}$ の元すべての共通部分として表すことができるので、$\mathcal{G}$ が有限集合であることから、$A_i \in \mathcal{G}$ であることもわかる。これらの A_i は明らかに条件 (1) と (2) を満たす。

任意の i で $\mathbf{P}(A_i) > 0$ であると仮定して、最後の等式を証明する。$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ は A_i 上一定の値 (それを c とおく) をとる確率変数である (なぜなら A_i より小さい $\mathcal{G}$ の元は $\varnothing$ しかないから)。従って

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X; A_i] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]; A_i\right] \\
&= \int_{A_i} \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] d\mathbf{P} \\
&= c\int_{A_i} d\mathbf{P} \\
&= c\mathbf{P}(A_i)
\end{aligned}$$

となる。ゆえに確率変数 $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ は A_i 上で一定の値 $c = \frac{\mathbb{E}[X;A_i]}{\mathbf{P}(A_i)}$ をとる。A_i たちは disjoint であるから、所望の等式を得る。

練習問題 1.6. $X \in L^2(\mathbf{P})$ であるとき、次を示せ：

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right])^2\right] = \min\left\{\mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right] \middle| Z \in L^2(\mathbf{P}) \text{ は } \mathcal{G}\text{-可測}\right\}.$$

解答. $X \in L^2(\mathbf{P})$ より $\left|\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right|^2 \le \mathbb{E}\left[X^2\middle|\mathcal{G}\right]$ となる (定理 1.34(4))。期待値をとって、

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right|^2\right] \le \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X^2\middle|\mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}[X^2] < \infty$$

となる。ゆえに $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] \in L^2(\mathbf{P})$ である。従って、とくに、任意の $Z \in L^2(\mathbf{P})$ に対して

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right])^2\right] \le \mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right]$$

となることが示せれば良い。

$Y :\overset{\text{def}}{=} Z - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right] - \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[-Y\left(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] + X - Z\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[-Y\left(2X - 2\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] - Y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}\left[Y\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] - X\right)\right] \\
&\ge 2\mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] - YX\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY|\mathcal{G}\right]\right] - 2\mathbb{E}\left[YX\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となって所望の不等式を得る。

練習問題 1.7. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ-加法族、X, Y を独立な確率変数、Y を $\mathcal{G}$-可測とするとき、任意の有界な $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-可測関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[g(X,y)\right]|_{y=Y}$$

となることを示せ。

解答. 本文中では右辺も条件付き期待値になっていたけど、$\mathcal{G}$ は必要ないはず。より一般的な次の事実を証明する：

(†) E_1, E_2 を (可分) 距離空間、$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ-加法族、$Y : \Omega \to E_2$ を $\mathcal{G}$-可測な確率変数、$X : \Omega \to E_1$ を Y と独立な確率変数とするとき、任意の $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$-可測関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[g(X,y)\right]|_{y=Y}$$

となる。

$g = g^+ - g^-$ と分けて示すことを考えれば、g は非負であると仮定して (†) を証明すれば十分である。また g を単関数の単調増加な列で近似して単調収束定理を用いることを考えれば、g は単関数であると仮定して (†) を証明すれば十分である。さらに単関数は定義関数の線形和であることから、ある $A \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ に対して $g = \mathbf{1}_A$ となると仮定して (†) を証明すれば十分である。さらに練習問題 1.3 (1) より $\mathcal{B}(E_1 \times E_2) = \sigma\left(\{A \times B | A \in \mathcal{B}(E_1), B \in \mathcal{B}(E_2)\}\right)$ であるから、ある $A \in \mathcal{B}(E_1), B \in \mathcal{B}(E_2)$ に対して $g = \mathbf{1}_{A \times B}$ となると仮定して (†) を証明すれば十分である。このとき $g(x,y) = \mathbf{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y)$ であるから、条件付き期待値の性質 (定理 1.34 (6) (7)) より主張 (†) は自明に成立する。以上で示された。

練習問題 1.8. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ-加法族とし、$X, X_n \in L^1(\mathbf{P})$ とする。次を示せ：

(1) $X_n \to X, \mathrm{in} L^1$ ならば $\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \to \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right], \mathrm{in} L^1$ である。

(2) $X_n \leq X_{n+1}, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ かつ $X_n \to X, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ ならば $\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \to \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ である。

(3) $X_n \geq 0, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ ならば

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n \middle| \mathcal{G}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$$

となる。ただし $\liminf_{n\to\infty} X_n \notin L^1(\mathbf{P})$ の場合は、この不等式は $\infty = \infty$ を許して

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n; A\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n; A\right], (\forall A \in \mathcal{G})$$

が成り立つことを意味する。

(4) $Y \geq 0$ なる $Y \in L^1(\mathbf{P})$ が存在し、$|X_n| \leq Y, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ であり、さらに $X_n \to X, (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ であるとする。このとき $\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \to \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ である。

解答. (1)。$\|X_n - X\|_1 = \mathbb{E}\left[X_n - X\right] \to 0, (n \to \infty)$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\|_1 &= \mathbb{E}\left[\|\mathbb{E}\left[X_n - X|\mathcal{G}\right]\|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\|X_n - X\||\mathcal{G}\right]\right] \qquad (\text{イェンセンの不等式}) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\|X_n - X\|\right] \\
&\to 0, \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となる。

(2)。$\bar{X} \stackrel{\text{def}}{:=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right]$ とおく。これは $\mathcal{G}$-可測である。$\bar{X} = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right], (\mathbf{P}\text{-a.s.})$ を示せば良い。そのためには、条件付き確率の一意性より、任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して $\mathbb{E}\left[\bar{X}; A\right] = \mathbb{E}\left[X; A\right]$ であれば良い。ここで通常の期待値に対する単調収束定理より、$\mathbf{P}$-a.s. に

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\bar{X}; A\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right]; A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \mathbf{1}_A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \mathbf{1}_A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n \mathbf{1}_A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n; A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X; A\right]
\end{aligned}
$$

となる。これは所望の結果である。

(3)。もしある $\mathbf{P}(A) > 0$ となる $A \in \mathcal{G}$ 上で $>$ 側の不等号が成立するとすれば、A 上で期待値をとることで

$$
\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n; A\right] > \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n; A\right]
$$

となるが、これは通常の期待値に対するファトゥの補題で X_n を $X_n \mathbf{1}_A$ とした場合に反する。

(4)。

$$
\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n||\mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{G}\right]
$$

なので $\bar{X} \stackrel{\text{def}}{:=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right]$ をとって (2) と同じことをすれば良い。

2　マルチンゲール

練習問題 2.1. $\mathcal{F}_t^X$ は $X_s, (s \in \mathbb{T} \cap [0,t])$ をすべて可測にする最小の σ-加法族であることを示せ。

解答. $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_t^X$ より小さい σ-加法族であれば、ある s とある $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ があって $\{X_s \in A\} \notin \mathcal{F}$ となるので X_s は $\mathcal{F}$-可測でなくなる。

練習問題 2.2. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ が $\mathcal{F}_t$-発展的可測であれば、$(\mathcal{F}_t)$-適合である。

解答. 二つの可測関数の合成

$$\{t\} \times \Omega \to [0,t] \times \Omega \xrightarrow{X} E$$

は可測である。

練習問題 2.3. $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ とする。$\mathbf{P}$-a.s. に右連続かつ $(\mathcal{F}_t)$-適合な確率過程 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な修正 $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を持つことを示せ。

解答. 例 2.2 より X_t は右連続な修正を持つ。補題 2.4 よりそれは $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測である。

練習問題 2.4. $X, Y \geq 0, p \geq 0$ とする。このとき次を示せ：

$$\mathbb{E}\left[XY^p\right] = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{E}\left[X; Y > \lambda\right] d\lambda.$$

解答. $Z = Y^p$ とおく。右辺を変形すると

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{E}\left[X; Y > \lambda\right] d\lambda &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[X; Y > \lambda\right] d(\lambda^p) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[X; Y > \lambda^{1/p}\right] d\lambda \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[X; Z > \lambda\right] d\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_\Omega X(\omega)\mathbf{1}_{Z>\lambda} d\mathbf{P}(\omega) d\lambda \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty X(\omega)\mathbf{1}_{Z>\lambda} d\lambda d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega X(\omega) \int_0^\infty \mathbf{1}_{Z>\lambda} d\lambda d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega X(\omega) Z(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \mathbb{E}[XZ] \\
&= \mathbb{E}[XY^p]
\end{aligned}$$

となる (Y のまま計算してもよかったかも)。

練習問題 2.5. $\mathcal{F}_\tau$ が σ-加法族であることを示せ。

解答. 定義を確認すると、

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, (t \in [0,\infty))\}$$

である。まず

- $\varnothing \cap \{\tau \le t\} = \varnothing \in \mathcal{F}_t$
- $\Omega \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$

なので σ-加法族であるための一つ目の条件は満たされる。$A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ と仮定する。このとき

$$(\Omega \setminus A) \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \setminus (\{\tau \le t\} \cap A)$$

であるが、ここで $\{\tau \le t\}$ と $\{\tau \le t\} \cap A$ はともに $\mathcal{F}_t$ の元であるから $(\Omega \setminus A) \cap \{\tau \le t\}$ も $\mathcal{F}_t$ の元となる。よって σ-加法族であるための二つ目の条件も成立する。$A_i \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ が $i = 1, 2, \cdots$ で成り立つとする。このとき

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \{\tau \le t\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_t$$

となって σ-加法族であるための条件が全て確認できた。

練習問題 2.6. $T > 0$ とする。$M_t \in L^2(\mathbf{P}), (\forall t \le T)$ となる連続マルチンゲール $\{M_t\}_{t \le T}$ 全体を $\mathcal{M}^2_{c,T}$ とおく。また、$M \in \mathcal{M}^2_{c,T}$ に対して

$$|||M||| :\stackrel{\text{def}}{=} \|M_T\|_2$$

と定義する。$M^n \in \mathcal{M}^2_{c,T}$ をマルチンゲールの列とし、$|||M^n - M^m||| \to 0, (n, m \to \infty)$ とする。このとき、ある $M \in \mathcal{M}^2_{c,T}$ が存在して

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \le T} |M^n_t - M_t|^2\right] \to 0, \quad (n \to \infty)$$

となることを示せ。

解答. Doob の不等式 (定理 2.9) と仮定 $|||M^n - M^m||| \to 0$ より

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \le T} |M^n_t - M_t|^2\right] \le 2^2 \mathbb{E}\left[(M^n_T - M^m_T)^2\right] \to 0, \quad (n, m \to \infty)$$

となる。よって命題 2.18(2) よりある連続な確率過程 M_t があって

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t \le T} (M^n_t - M_t)^2\right] = 0$$

となる。あとは M_t がマルチンゲールとなれば良いが、それは命題 2.8(4) より従う。

練習問題 2.7.

$$d(M, N) :\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\| \langle M - N \rangle_n \|_2 \wedge 1\right), \quad (M, N \in \mathcal{M}^2_c)$$

とおく。

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\mathbb{E}\left[\sum_{t \le n} |M_t - N_t|^2\right]\right)^{1/2} \wedge 1 \le 4d(M, N)$$

を示せ。

(2) $\lim_{n,m\to\infty} d(M,N) = 0$ であるときあ r$M \in \mathcal{M}_c^2$ が存在して $\lim_{n\to\infty} d(M_n, M) = 0$ となることを示せ。

解答. (1)。

(2)。(1) より、すべての N に対して

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t\leq N} |M_t^n - M_t^m|^2\right] \to 0, \quad (n, m \to \infty)$$

となる。すると命題 2.18(2) よりある連続確率過程 $M_t, t \geq 0$ があって

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t\leq N} |M_t^n - M_t|^2\right] \to 0, \quad (n \to \infty)$$

となる。すると $\| \langle M^n - M \rangle_N \|_2 =$

練習問題 2.8.

3 ブラウン運動

練習問題 3.1. $X \sim N(\mu, \Sigma)$ であることは、任意の $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathfrak{g}_{N,\mu,\Sigma}(x)dx$$

が成り立つことと同値であることを示せ。

解答. f として定義関数 $\mathbf{1}_A$ をとることで、この等式が成り立てば $X \sim N(\mu, \Sigma)$ であることはわかる。逆を示すには、f が定義関数であるときにこの等式が成立することから、線形和をとることで単関数に対してこの等式が成立し、単関数の単調増加な列で有界非負可測関数を近似して単調収束定理を用いることで、任意の有界非負可測関数に対してこの等式が成立し、任意の有界可測関数を有界非負可測関数の差で表すことによりすべての $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ に対してこの等式が成立することがわかる。

練習問題 3.2.

(1) $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g}_N(t,x) = \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{g}_N(t,x)$ となることを示せ。

(2) $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$u(t,x) :\overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\mathfrak{g}_N(t,y)dy$$

とおく。$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\Delta u$ を示せ。

解答.

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\mathfrak{g}_N(t,y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\mathfrak{g}_N(t,x+y)dy$$

なので (1) がわかれば (2) は明らかである。(1) を示す。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g}_N(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g}_{N,0,tI}(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N t^N}}\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum_\alpha (x^\alpha)^2\right)\right) \\
&= -\frac{N}{2}t^{-\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}}\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum (x^\alpha)^2\right) + \left(-\frac{1}{2}\sum_\alpha (x^\alpha)^2\right)\frac{1}{t^2}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N t^N}}\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum (x^\alpha)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_\alpha\left(\frac{(x^\alpha)^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\mathfrak{g}_N(t,x), \\
\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\mathfrak{g}_N(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^N}}\left(-\frac{2x^\alpha}{2t}\right)\exp\left(-\frac{1}{2t}\sum_\alpha (x^\alpha)^2\right) \\
&= -\frac{x^\alpha}{t}\mathfrak{g}_N(t,x), \\
\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)^2\mathfrak{g}_N(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(-\frac{x^\alpha}{t}\mathfrak{g}_N(t,x)\right) \\
&= -\frac{1}{t}\left(\mathfrak{g}_N(t,x) + x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\mathfrak{g}_N(t,x)\right) \\
&= -\frac{1}{t}\left(\mathfrak{g}_N(t,x) - \frac{(x^\alpha)^2}{t}\mathfrak{g}_N(t,x)\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{(x^\alpha)^2}{t} - \frac{1}{t} \right) \mathfrak{g}_N(t,x),$$

であるから、これらを比較すれば良い。

練習問題 3.3. B_t を d 次元ブラウン運動とする。

(1) $c > 0$ とし、$\tilde{B}_t :\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ とおく。$\tilde{B}_t$ も d 次元ブラウン運動であることを示せ。

(2) $t_0 \geq 0$ とし、$\hat{B}_t :\overset{\text{def}}{=} B_{t+t_0} - B_{t_0}$ とおく。$\hat{B}_t$ も d 次元ブラウン運動であることを示せ。

(3) U を直交行列とする。UB_t も d 次元ブラウン運動であることを示せ。

解答. (1) と (2) では、3.2 節冒頭のブラウン運動の定義にある 4 つの条件を満たすことを確認する。

(1)。まず $\tilde{B}_0(\omega) = \frac{1}{c} B_0(\omega) = 0$ であるから $\tilde{B}_t$ は一つ目の条件を満たす。

また $t \mapsto c^2 t$ は連続関数であるから、任意の ω に対して $\tilde{B}_t(\omega) = \frac{1}{c} B_{c^2 t}(\omega)$ も t に関する連続関数となり、$\tilde{B}_t$ は二つ目の条件も満たす。

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ をとる。B_t は d 次元ブラウン運動であるから、三つ目の条件より、$0 = c^2 t_0 < c^2 t_1 < \cdots < c^2 t_n$ に対して $B_{c^2 t_1} - B_{c^2 t_0}, \cdots, B_{c^2 t_n} - B_{c^2 t_{n-1}}$ は独立であり、従ってこれらを一斉に $\frac{1}{c}$ 倍した $\tilde{B}_{t_1} - \tilde{B}_{t_0}, \cdots, \tilde{B}_{t_n} - \tilde{B}_{t_{n-1}}$ も独立である。よって $\tilde{B}_t$ は三つ目の条件も満たす。

$X \sim N(0, tI)$ となるときに $cX \sim N(0, c^2 tI)$ となることに注意すれば $\tilde{B}_t$ が四つ目の条件を満たすことがわかる。以上で $\tilde{B}_t$ は d 次元ブラウン運動である。

(2)。まず $\hat{B}_0 = B_{t_0} - B_{t_0} = 0$ であるから $\hat{B}_t$ は一つ目の条件を満たす。

また $\hat{B}_t$ は連続な確率過程から確率変数を引いたものであるから連続な確率過程であり、とくに二つ目の条件を満たす。

さらに $0 = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_n$ に対して $t_i = t'_i + t_0, (i = 1, \cdots, n), t_{-1} = 0$ と置きなおすことで $B_{t_0} - B_{t_{-1}}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立となるが、ここで $\hat{B}_t = B_{t+t_0} - B_t$ であるから

$$\hat{B}_{t'_i} = B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \hat{B}_{t'_i} - \hat{B}_{t'_{i-1}}, (i = 0, \cdots, n)$$

となり、従って $\hat{B}_{t'_1} - \hat{B}_{t'_0}, \cdots, \hat{B}_{t'_n} - \hat{B}_{t'_{n-1}}$ も独立となる。これは $\hat{B}_t$ が三つ目の条件を満たすことを示している。

$0 \leq s < t$ を任意にとる。$\hat{B}_t - \hat{B}_s = B_{t+t_0} - B_{s+t_0} \sim N(0, (t + t_0 - s - t_0)I) = N(0, (t-s)I)$ なので $\hat{B}_t$ は四つ目の条件も満たす。

(3)。命題 3.5 を使う。$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ と $f \in C_b((\mathbb{R}^d)^n)$ を任意にとる。$g(x_1, \cdots, x_n) :\overset{\text{def}}{=} f(Ux_1, \cdots, Ux_n)$ とおく。すると $g \in C_b((\mathbb{R}^d)^n)$ である。従って、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(UB_{t_1}, \cdots, UB_{t_n})] &= \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})] \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} g(x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=1}^n \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(Ux_1, \cdots, Ux_n) \prod_{i=1}^n \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^n \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, U^{-1}(y_i - y_{i-1}))(|\det U^{-1}|)^n dy_1 \cdots dy_n
\end{aligned}$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, U^{-1}(y_i - y_{i-1}))dy_1 \cdots dy_n$$

となる。ここで U が直交行列であることから、

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_d(t, U^{-1}x) &= \frac{1}{(2\pi t)^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle U^{-1}x, t^{-1}U^{-1}x\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi t)^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle x, t^{-1}x\right\rangle\right) \\
&= \mathfrak{g}_d(t, x)
\end{aligned}$$

となることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(UB_{t_1}, \cdots, UB_{t_n})] &= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, U^{-1}(y_i - y_{i-1}))dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(y_1, \cdots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_d(t_i - t_{i-1}, y_i - y_{i-1})dy_1 \cdots dy_n
\end{aligned}$$

となることがわかり、命題 3.5 より UB_t は d 次元ブラウン運動となる。

練習問題 3.4. B_t を 1 次元ブラウン運動とする。

(1) $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(t, x)dx \leq 1 - \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + \frac{t}{2}$ を示せ。
(2) $T > 0$ とし、$V_n :\overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|B_{\frac{(k+1)T}{2^n}} - B_{\frac{kT}{2^n}}\right|$ とおく。$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-V_n}\right] = 0$ を示せ。
(3) $\mathbf{P}$-a.s. に写像 $t \mapsto B_t(\omega)$ は有界変動でないことを示せ。

解答. (1)。$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(t^2, x)dx \leq 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}t + \frac{t^2}{2}$ を示せば良い。

$$F(t) :\overset{\text{def}}{=} 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}t + \frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(t^2, x)dx$$

と置く。

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(t^2, x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-\frac{1}{2t^2}x^2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}t}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2t^2}x^2 - x}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2 - tx}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}t^2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}t^2}\int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx
\end{aligned}$$

であるから、

$$F(t)=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}t+\frac{t^2}{2}-e^{\frac{1}{2}t^2}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

となる。従って $F(0)=0$ がわかる。よって $F'(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ を証明すれば良い。また、

$$\begin{aligned}
F'(t)&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}+t-te^{\frac{1}{2}t^2}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(te^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+1\right)\\
&=t-te^{\frac{1}{2}t^2}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}te^{\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\\
&=te^{\frac{1}{2}t^2}\left(+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx-1+e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)
\end{aligned}$$

となる。

$$G(t):\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx-1+e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

とおく。$G(0)=0,\lim_{t\to\infty}G(t)=0$ は直ちにわかる。

$$\begin{aligned}
G'(t)&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}-te^{-\frac{1}{2}t^2}\\
&=e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}-t\right)
\end{aligned}$$

であるから、$0\leq t\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ に対して $G'(t)\geq 0$ であり、$t\geq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ に対して $G'(t)\leq 0$ である。ここで $G(0)=0,\lim_{t\to\infty}G(t)=0$ を考慮すれば $G(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ がわかる。以上より $F'(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ がわかり、$F(t)\geq 0,(\forall t\geq 0)$ がわかった。

(2)。B_t はブラウン運動なので、各 $k=0,\cdots,2^n-1$ に対して $B_{\frac{(k+1)T}{2^n}}-B_{\frac{kT}{2^n}}$ たちは独立である。従って、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-V_n}\right]&=\mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{2^n}\exp\left(-|B_{\frac{(k+1)T}{2^n}}-B_{\frac{kT}{2^n}}|\right)\right]\\
&=\prod_{k=0}^{2^n}\mathbb{E}\left[\exp\left(-|B_{\frac{(k+1)T}{2^n}}-B_{\frac{kT}{2^n}}|\right)\right]\\
&=\prod_{k=0}^{2^n}\int_{\mathbb{R}}e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(\frac{(k+1)T}{2^n}-\frac{kT}{2^n},x)dx\\
&=\prod_{k=0}^{2^n}\int_{\mathbb{R}}e^{-|x|}\mathfrak{g}_1(\frac{T}{2^n},x)dx\\
&\stackrel{\bigstar}{\geq}\prod_{k=0}^{2^n}\left(1-\frac{T}{2^{n-1}\pi}+\frac{T}{2^{n+1}}\right)\\
&=\left(1-\frac{T}{2^{n-1}\pi}+\frac{T}{2^{n+1}}\right)^{2^n}\\
&\to 0,\quad(n\to\infty)
\end{aligned}$$

となる。ただし ★ の箇所は (1) を用いた。

(3)。$\omega \in A$ に対して $t \mapsto B_t(\omega)$ が有界変動となるような $\mathbf{P}(A) \neq 0$ な集合 $A \subset \Omega$ が存在するとする。すると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{-V_n}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; A\right] + \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; \Omega \setminus A\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; A\right] \end{aligned}$$

となる。ここで A は $t \mapsto B_t(\omega)$ が有界変動となるような ω たちからなるので、e^{-V_n} は各 $\omega \in A$ に対して 0 でない正の値をとるある確率変数に収束する。すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-V_n}; A\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} e^{-V_n}; A\right] \neq 0$$

となり、(2) の結果に反する。

練習問題 3.5. B_t を d 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする。次を示せ。

(1) $B_t^\alpha, (\alpha = 1, \cdots, d)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである。
(2) $\left\{B_t^\alpha B_t^\beta - \delta_{\alpha\beta} t\right\}_t, (\alpha, \beta = 1, \cdots, d)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである。とくに $\left\langle B^\alpha, B^\beta \right\rangle_t = t, (\alpha \neq \beta, t \geq 0)$ となる。

解答. (1)。$0 \leq s < t$ をとる。B_t はブラウン運動なので、$B_t - B_s$ は B_s と独立であり、すなわち $\mathcal{F}_s$ と独立であるから、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[B_t^\alpha | \mathcal{F}_s\right] &= B_s^\alpha + \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha | \mathcal{F}_s\right] \\ &= B_s^\alpha + \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha\right] \\ &= B_s^\alpha \end{aligned}$$

となる。これは B^α が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであることを示している。

(2)。$0 \leq s < t$ をとる。$\alpha \neq \beta$ のときは、B^α, B^β は独立であるから、$B^\alpha B^\beta$ のマルチンゲール性は B^α のマルチンゲール性から従う。残っているのは $\alpha = \beta$ のときである。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s\right] &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha)^2 - (B_s^\alpha)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha - B_s^\alpha)^2 + 2B_s^\alpha(B_t^\alpha - B_s^\alpha) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha - B_s^\alpha)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[2B_s^\alpha(B_t^\alpha - B_s^\alpha) | \mathcal{F}_s\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + \mathbb{E}\left[(B_t^\alpha - B_s^\alpha)^2\right] + 2B_s^\alpha \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - t + t - s + 2B_s^\alpha \mathbb{E}\left[B_t^\alpha - B_s^\alpha\right] \\ &= (B_s^\alpha)^2 - s \end{aligned}$$

となるので $(B_t^\alpha)^2 - t$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールとなる。以上で示された。

練習問題 3.6. $0 = t_0 < t_1 < \cdots$ は $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$ を満たすとする。$\alpha = 1, \cdots, d, i = 0, 1, \cdots$ に対し、$f_{\alpha,i}$ は $\mathcal{F}_{t_i}$-可測であるとする。任意の $t \geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f_{\alpha,i}^2 (t \wedge t_{i+1} - t \wedge t_i)\right)\right] < \infty$$

であるとする。このとき

$$M_t :\overset{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f_{\alpha,i}\left(B^{\alpha}_{t\wedge t_{i+1}} - B^{\alpha}_{t\wedge t_i}\right),$$
$$e_t :\overset{\text{def}}{=} \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f^2_{\alpha,i}(t\wedge t_{i+1} - t\wedge t_i)\right),$$

で定義される確率過程 e_t はマルチンゲールであることを示せ。

解答. 定理 3.10 より M_t はマルチンゲールである。また、定理 3.10 の証明と同様にして、$t_i \le s < t \le t_{i+1}$ となる場合に $\mathbb{E}\left[e_t | \mathcal{F}_s\right] = e_s$ が証明できれば良い。さらに、$t_i < s < t \le t_{i+1}$ または $t_i \le s < t < t_{i+1}$ のそれぞれの場合で $\mathbb{E}\left[e_t | \mathcal{F}_s\right] = e_s$ が証明できているとすると、$s = t_i, t = t_{i+1}$ の場合も

$$\mathbb{E}\left[e_{t_{i+1}} \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e_{t_{i+1}} \middle| \mathcal{F}_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}}\right] \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[e_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] = e_{t_i}$$

が成り立つ。従って $t_i < s < t \le t_{i+1}$ と $t_i \le s < t < t_{i+1}$ のそれぞれの場合に $\mathbb{E}\left[e_t | \mathcal{F}_s\right] = e_s$ が証明できれば良い。この場合は $0 < 1 - \frac{t_{i+1}-t_i}{t-s}$ となることに注意。

$0 < \varepsilon < 1 - \frac{t_{i+1}-t_i}{t-s}$ となる ε をとる。このとき $\frac{1}{1-\varepsilon} < \frac{t_{i+1}-t_i}{t-s}$ である。仮定より、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2(1-\varepsilon)}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f^2_{\alpha,i}(t-s)\right)\right] \\
&< \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=0}^{\infty} f^2_{\alpha,i}(t_{i+1}-t_i)\right)\right] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

となることに注意。

相加相乗平均の関係より

$$f_{\alpha,i}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s) \le \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i} + \frac{(1-\varepsilon)}{2(t-s)}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)^2$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} f_{\alpha,i}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)\right)\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i} + \frac{(1-\varepsilon)}{2(t-s)}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)^2\right)\right] \\
&\overset{\bigstar}{=} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i}\right]\mathbb{E}\left[\frac{(1-\varepsilon)}{2(t-s)}(B^{\alpha}_t - B^{\alpha}_s)^2\right)\right] \\
&\overset{\spadesuit}{\le} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2(t-s)} f^2_{\alpha,i}\right)\right] e\varepsilon^{-d/2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

となる。ただし ★ の箇所は $f_{\alpha,i}$ が $\mathcal{F}_{t_i}$-可測であることと $B_t - B_s$ が $\mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_{t_i}$ と独立であることを使い、♠ の箇所は定理 3.11 を使った。以上で

$$\exp\left(\sum_{\alpha} f_{\alpha,i}(B_t^\alpha - B_s^\alpha)\right) \in L^1(\mathbf{P})$$

がわかった。あとは定理 3.10 の証明と同様である。

練習問題 3.7. B_t を d 次元ブラウン運動、$\xi \in \mathbb{R}^d$ とする。このとき $\exp\left(i\left\langle \xi, B_t\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)$ はマルチンゲールであることを示せ。

解答. $0 \le s < t$ をとる。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\left\langle \xi, B_t\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(i\left\langle \xi, B_t - B_s\right\rangle\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(i\left\langle \xi, B_t - B_s\right\rangle\right)\right] \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\int_{(\mathbb{R}^d)^2} e^{i\langle \xi, x_2 - x_1\rangle}\mathfrak{g}_d(s, x_1)\mathfrak{g}_d(t-s, x_2 - x_1)dx_1dx_2 \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x_2\rangle}\mathfrak{g}_d(t-s, x_2)dx_2\int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{g}_d(s, x_1)dx_1 \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle}\mathfrak{g}_d(t-s, x)dx \\
&\overset{\bigstar}{=} \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[e^{i\langle \xi, N(0,(t-s)I)\rangle}\right] \\
&\overset{\spadesuit}{=} \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}\langle \xi, (t-s)\xi\rangle} \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}t - \frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)\right) \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, B_s\right\rangle + \frac{|\xi|^2}{2}s\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし ★ の箇所は式 (3.2) を用い、♠ の箇所はガウス分布 N の特性関数の表示 (命題 3.1(5)) を用いた。以上で所望の結果を得る。

練習問題 3.8. B_t を 1 次元ブラウン運動とする。$\tau :\overset{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 | B_t > 0\}$ とおく。

(1) $\{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0^*$ となることを示せ。
(2) $\mathbf{P}(\tau = 0) \ge \frac{1}{2}$ を示せ。
(3) $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$ を示せ。

解答. (1)。

$$\Omega \setminus \{\tau = 0\} = \{\tau > 0\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \tau > \frac{1}{N} \right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\{ \tau > \frac{1}{N} \right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\{ \sup_{0\le t\le \frac{1}{N}} B_t \le 0 \right\} \\
&\in \mathcal{F}^*_{1/N}, \quad (\forall N \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

となるよって

$$\{\tau = 0\} \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^*_{1/N} \overset{\bigstar}{=} \mathcal{F}^*_0$$

となる。ただし ★ の箇所は定理 3.17 を用いた。以上で示された。

(2)。$\{\tau = 0\} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \left\{\tau \le \frac{1}{N}\right\}$ なので、定理 1.4(3) より

$$\mathbf{P}(\tau = 0) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\tau \le \frac{1}{N}\right)$$

となる。一方、

$$\left\{\tau \le \frac{1}{N}\right\} \supset \left\{B_{1/N} > 0\right\}$$

であるから、

$$\mathbf{P}\left(\tau \le \frac{1}{N}\right) \ge \mathbf{P}\left(B_{1/N} > 0\right) = \int_{x>0} \mathfrak{g}_1\left(\frac{1}{N}, x\right) dx = \frac{1}{2}$$

となる。以上より

$$\mathbf{P}(\tau = 0) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\tau \le \frac{1}{N}\right) \ge \frac{1}{2}$$

がわかる。

(3)。(1) より $\mathbf{P}(\tau = 0) = 0$ または $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$ である。一方 (2) より $\mathbf{P}(\tau = 0) \ge \frac{1}{2}$ である。以上より $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$ となる。

4 確率積分

練習問題 4.1. $f_t \in \mathcal{L}_0$ に対する確率積分は f_t の表示によらないことを示せ。

解答. f_t, g_s が同じ $\mathcal{L}_0$ の元を与えるとする。$0 = t_0 < t_1 < \cdots$ と $0 = s_0 < s_1 < \cdots$ を各 $[t_i, t_{i+1}), [s_i, s_{i+1})$ 上で f_t, g_t が一定 ($\omega \in \Omega$ には依存する) となるような時刻の列とする。f_t, g_s が同じ単関数の (異なるかもしれない) 表示であることから、ある $0 = u_0 < u_1 < \cdots$ と $i(n), j(n)$ が存在して、各 n について $t_{i(n)} = u_n = s_{j(n)}$ であり、また各 n に対して $s, t \in [u_n, u_{n+1})$ となるならば $f_t = f_{t_{i(n)}} = g_s = g_{s_{j(n)}}$ となる。このとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=i(n)}^{i(n+1)-1} f_{t_i}\left(B^\alpha_{t\wedge t_{i+1}} - B^\alpha_{t\wedge t_i}\right)& \\
&= f_{t_{i(n)}} \sum_{i=i(n)}^{i(n+1)-1} \left(B^\alpha_{t\wedge t_{i+1}} - B^\alpha_{t\wedge t_i}\right) \\
&= f_{t_{i(n)}} \left(B^\alpha_{t\wedge t_{i(n+1)}} - B^\alpha_{t\wedge t_{i(n)}}\right) \\
&= f_{u_n} \left(B^\alpha_{t\wedge u_{n+1}} - B^\alpha_{t\wedge u_n}\right) \\
\sum_{j=j(n)}^{j(n+1)-1} g_{s_j}\left(B^\alpha_{s\wedge s_{j+1}} - B^\alpha_{s\wedge s_j}\right)& \\
&= g_{s_{j(n)}} \sum_{j=j(n)}^{j(n+1)-1} \left(B^\alpha_{s\wedge s_{j+1}} - B^\alpha_{s\wedge s_j}\right) \\
&= g_{u_n} \left(B^\alpha_{s\wedge u_{n+1}} - B^\alpha_{s\wedge u_n}\right),
\end{aligned}
$$

となる。これらは変数 s, t の表記の違い以外に異なる点はない。以上を足し合わせることで確率積分が表記によらないことがわかる。

練習問題 4.2. $0 = t_0 < t_1 < \cdots, \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ とする。$f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{F}_{t_i}$-可測関数として、

$$
f_t \overset{\text{def}}{:=} \sum_{i=0}^{\infty} f_i \mathbf{1}_{[0,t_i)}(t)
$$

と定義する。このとき、$f_t \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ であり、さらに

$$
\int_0^t f_s dB^\alpha_s = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \left(B^\alpha_{t\wedge t_{i+1}} - B^\alpha_{t\wedge t_i}\right)
$$

となることを示せ。

解答. この問題は f_t の定義を間違えていると思う。なぜなら各 t について f_t の定義式の右辺は無限和になっていて、たとえば関数 f_i として $f_i = i$ のような定数関数をとってくると右辺は発散してしまう。これは $f_t \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ どころの話ではないと思われる。たぶん、定義関数が $\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$ なんじゃないか？

定義関数が $\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$ だと思って問題を解く。明らかに f_t は $\mathcal{F}_t$-発展的可測である。任意に t をとる。$t_n \le t < t_{n+1}$ となる n をとると、

$$\int_0^t f_s^2 ds = \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} f_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s) ds = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 (t_{i+1} - t_i) + f_n^2 (t - t_n) < \infty$$

であるので、$f_t \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ である。

最後の等式を証明する。まず、(有界とは限らない!) 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ により、$f_t = f\mathbf{1}_{[0,u)}(t)$ とかけている場合に最後の等式を示す。可測関数 f が有界であれば、定義より、$u \ge t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_t^\alpha$$

であり $u \le t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_u^\alpha$$

となる。とくに

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_{t\wedge u}^\alpha$$

となる。次に f が非負の場合、$f^n :\stackrel{\text{def}}{=} f \wedge n$ とおけば $f^n \mathbf{1}_{[0,u)}(t) \to f\mathbf{1}_{[0,u)}(t), (n \to \infty, \forall \omega, t)$ であり、従って $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ の関数に対する確率積分の定義より、$u \ge t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} f^n B_t^\alpha = f B_t^\alpha$$

となり $u \le t$ なら

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha = \lim_{n\to\infty} f^n B_u^\alpha = f B_u^\alpha$$

となる。とくに

$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f B_{t\wedge u}^\alpha$$

となる。最後に f が任意の場合、$f = f_+ - f_-$ として確率積分の加法性より $u \ge t$ なら

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) - f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s)) dB_s^\alpha \\
&= \int_0^t f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha - \int_0^t f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha \\
&= f_+ B_t^\alpha - f_- B_t^\alpha \\
&= f B_t^\alpha
\end{aligned}$$

となり $u \le t$ なら

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) - f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s)) dB_s^\alpha \\
&= \int_0^t f_+ \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha - \int_0^t f_- \mathbf{1}_{[0,u)}(s) dB_s^\alpha \\
&= f_+ B_u^\alpha - f_- B_u^\alpha \\
&= f B_u^\alpha
\end{aligned}$$

となる。とくに
$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = fB_{t\wedge u}^\alpha$$
となる。

$f_t = f\mathbf{1}_{[u_1,u_2)}(t)$ に対しては、$f_t = f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(t) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(t)$ であるから、確率積分の加法性より、$t \le u_1$ なら

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s))dB_s^\alpha \\
&= \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s)dB_s^\alpha - \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s)dB_s^\alpha \\
&= fB_t^\alpha - fB_t^\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

であり、$u_1 \le t \le u_2$ なら

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s))dB_s^\alpha \\
&= \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s)dB_s^\alpha - \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s)dB_s^\alpha \\
&= fB_t^\alpha - fB_{u_1}^\alpha \\
&= f(B_t^\alpha - B_{u_1}^\alpha)
\end{aligned}$$

であり、$t \ge u_2$ なら

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t (f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s) - f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s))dB_s^\alpha \\
&= \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_2)}(s)dB_s^\alpha - \int_0^t f\mathbf{1}_{[0,u_1)}(s)dB_s^\alpha \\
&= fB_{u_2}^\alpha - fB_{u_1}^\alpha \\
&= f(B_{u_2}^\alpha - B_{u_1}^\alpha)
\end{aligned}$$

である。とくに、
$$\int_0^t f_s dB_s^\alpha = f(B_{t\wedge u_2} - B_{t\wedge u_1})$$
となる。

この問題で考えられている一般の f_t に対して最後の等式を証明する。$t_n \le t < t_{n+1}$ となる n をとれば、確率積分の加法性とこれまでに得られた結果から、

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \int_0^t \sum_{i=0}^\infty f_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s)dB_s^\alpha \\
&= \sum_{i=0}^\infty \int_0^t f_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s)dB_s^\alpha \\
&= \sum_{i=0}^\infty f_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})
\end{aligned}$$

となる。ただし和は実際には有限和であることから積分と交換した。以上で所望の等式が証明できた。

練習問題 4.3. $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。$\phi_n(t) :\overset{\text{def}}{=} \phi\left(\frac{[2^n t]}{2^n}\right)$ とおく。次を示せ：

(1) $\int_0^t \phi_n(s) dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t \phi_n^2(s)ds\right)$
(2) $\int_0^t \phi(s) dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t \phi^2(s)ds\right)$

解答. (1)。より一般に、$0 = t_0 < t_1 < \cdots, \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ となる時刻の列が存在して各 $t \in [t_i, t_{i+1})$ に対して ω, t によらずに一定の値 f_t をとる確率過程 $f_t \in \mathcal{L}_0$ に対して同様の事実を証明する。$t \geq 0$ をとる。$t_m \leq t < t_{m+1}$ となる m をとると、

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s dB_s^\alpha &= \sum_{i=0}^{\infty} f_{t_i}\left(B_{t\wedge t_{i+1}}^\alpha - B_{t\wedge t_i}^\alpha\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} f_{t_i}\left(B_{t_{i+1}}^\alpha - B_{t_i}^\alpha\right) + f_{t_m}\left(B_t^\alpha - B_{t_m}^\alpha\right) \\
&\overset{\bigstar}{\sim} N\left(0, \sum_{i=0}^{m-1} f_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) + f_{t_m}^2 (t - t_m)\right) \\
&= N\left(0, \int_0^t f_s^2 ds\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし ★ の箇所は命題 3.2(2) を用いた。

(2)。まず ϕ_n が補題 4.5 の条件を満たすことを示す。任意に $t \geq 0$ と $\varepsilon > 0$ をとる。区間 $[0,t]$ はコンパクトなので、ϕ は $[0,t]$ 上では一様連続である。従って、ある $\delta > 0$ が存在して $|x-y| < \delta, x, y \in [0,t]$ に対して $|\phi(x) - \phi(y)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}$ となる。ここで $t2^{-N} < \delta$ となる十分大きい N をとれば、$n \geq N$ と $s \in [0,t]$ に対して $\left|s - \frac{[2^n s]}{2^n}\right| < \frac{t}{2^n} < \delta$ となるから、とくに $n \geq N$ と $s \in [0,t]$ に対して

$$|\phi_n(s) - \phi(s)| = \left|\phi(\frac{[2^n s]}{2^n}) - \phi(s)\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}$$

となる。以上より、$n \geq N$ に対して

$$\int_0^t |\phi_n(s) - \phi(s)|^2 ds < \int_0^t \frac{\varepsilon}{t} ds = \varepsilon$$

となる。これは

$$\int_0^t |\phi_n(s) - \phi(s)|^2 ds \to 0, \quad (n \to \infty)$$

を示している。よって補題 4.6 より、ϕ の確率積分 $\int_0^t \phi(s) dB_s^\alpha$ は確率過程 $\int_0^t \phi_n(s) dB_s^\alpha$ の極限となる。

次に、各 t に対して二つの確率変数 $\int_0^t \phi_n(s) dB_s^\alpha$ と $\int_0^t \phi_m(s) dB_s^\alpha$ の差を考える。これらは (1) よりガウス分布であることに注意。$\phi_n(s) - \phi_m(s)$ は $[i/2^N, (i+1)/2^N)$ の形の区間上で ω にも s にもよらない定数であるから、(1) でより一般的に証明した事実から、

$$\int_0^t (\phi_n(s) - \phi_m(s)) dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t (\phi_n(s) - \phi_m(s))^2 ds\right)$$

となる。従って、

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \phi_n(s) dB_s^\alpha - \int_0^t \phi_m(s) dB_s^\alpha \right\|_2 &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_n(s) dB_s^\alpha - \int_0^t \phi_m(s) dB_s^\alpha \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E}\left[N\left(0, \int_0^t \left(\phi_n(s) - \phi_m(s)\right)^2 ds \right) \right] \\
&= \int_0^t \left(\phi_n(s) - \phi_m(s)\right)^2 ds
\end{aligned}
$$

となる。ここで既に示したことから、十分おおきい n, m に対しては、任意の s について

$$
|\phi_n(s) - \phi_m(s)|^2 \leq |\phi_n(s) - \phi(s)|^2 + |\phi_m(s) - \phi(s)|^2 < 2\varepsilon
$$

となるから、

$$
\int_0^t \left(\phi_n(s) - \phi_m(s)\right)^2 ds \to 0, \quad (n, m \to \infty)
$$

となる。よって定理 1.13 より、ガウス分布の族 $\int_0^t \phi_n(s) dB_s^\alpha$ は確率変数 $\int_0^t \phi(s) dB_s^\alpha$ に L^2 収束する。よって命題 3.2(5) より $\int_0^t \phi(s) dB_s^\alpha$ もガウス分布であり、

$$
\int_0^t \phi_n^2(s) ds \to \int_0^t \phi^2(s) ds, \quad (n \to \infty)
$$

であることから

$$
\int_0^t \phi(s) dB_s^\alpha \sim N\left(0, \int_0^t \phi^2(s) ds\right)
$$

がわかる。

練習問題 4.4. $T \in (0, \infty]$ とする。$\phi : [0, T) \to (0, \infty)$ は $\int_0^T \phi^2(s) ds = \infty$ を満たすとする。$\Phi(t) :\overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^t \phi^2(s) ds$ とおくとこれは単調増加である。ψ を Φ の逆関数とする。このとき

$$
b_t :\overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^{\psi(t)} \phi(s) dB_s^\alpha
$$

で定まる確率過程はブラウン運動であることを示せ。

解答. $c_t :\overset{\mathrm{def}}{=} b_{\Phi(t)} = \int_0^t \phi(s) dB_s^\alpha$ とおく。任意に $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をとる。伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
f(b_t) - f(b_0) &= f(c_{\psi(t)}) - f(0) \\
&= \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s) dB_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^{\psi(t)} f''(c_s)\phi^2(s) ds \\
&= \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s) dB_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^{t} f''(c_{\psi(s)})\phi^2(\psi(s)) d\psi(s) \\
&\overset{\bigstar}{=} \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s) dB_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^{t} f''(b_s) ds
\end{aligned}
$$

となる。ただし ★ の箇所は $\psi^{-1}(s) = \Phi(s) = \int_0^s \phi^2(u) du$ を用いて

$$
ds = d\left(\Phi(\psi(s))\right) = \psi'(s)\Phi'(\psi(s)) ds = \phi^2(\psi(s)) d(\psi(s))
$$

と計算した。とくに、定理 4.9(4) より

$$f(b_t) - f(b_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(b_s)ds = \int_0^{\psi(t)} f'(c_s)\phi(s)dB_s^\alpha$$

はマルチンゲールであり、定理 3.12 より b_t はブラウン運動となる。

別解答。定理 4.9(4) より c_t はマルチンゲールであり、その二次変分は $\Phi(t) = \int_0^t \phi^2(s)ds$ である。従ってとくに b_t もマルチンゲールであり、その二次変分は $\Phi(\psi(t)) = t$ である。注意 4.18 にあるレヴィの定理を用いることで b_t がブラウン運動であることがわかる。

練習問題 4.5. 伊藤過程 X_t と $f \in C^2(\mathbb{R})$ に対し、

$$d(f(X_t)) = \sum_{i=1}^N f_i^{(1)}(X_t) \circ dX_t^i$$

を示せ。ただし $\circ$ は Stratonovich 積分である。

解答. 添字は縮約記法で表記する。$dX_t^i = \alpha_j^i dB_t^j + b_t^i dt$ とおく。

$$dX_t^i \cdot dX_t^j = \alpha_k^i \alpha_l^j dB_t^k dB_t^l = \alpha_k^i \alpha_l^j \delta^{kl} dt = \sum_k \alpha_k^i \alpha_k^j dt$$

となる。伊藤の公式から

$$\begin{aligned} d(f(X_t)) &= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} f_{ij}^{(2)} dX_t^i \cdot dX_t^j \\ &= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_k f_{ij}^{(2)} \alpha_k^i \alpha_k^j dt, \\ d(f_i^{(1)}(X_t)) \cdot dX_t^i &= f_{ij}^{(2)}(X_t)dX_t^j \cdot dX_t^i + \frac{1}{2} f_{ijk}^{(3)}(X_t) dX_t^j \cdot dX_t^i \cdot dX_t^k \\ &= f_{ij}^{(2)}(X_t)dX_t^i \cdot dX_t^j \\ &= \sum_k f_{ij}^{(2)}(X_t)\alpha_k^i \alpha_k^j dt \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} d(f(X_t)) &= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_k f_{ij}^{(2)} \alpha_k^i \alpha_k^j dt \\ &= f_i^{(1)}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} d(f_i^{(1)}(X_t)) \cdot dX_t^i \\ &= f_i^{(1)}(X_t) \circ dX_t^i \end{aligned}$$

となる。これは所望の等式である。

練習問題 4.6. 確率変数 X は $e^{aX} \in L^1(\mathbf{P}), (\forall a \in \mathbb{R})$ を満たすとする。

(1) $e^{|X|} \in L^p(\mathbf{P}), (\forall p \geq 1)$ を示せ。
(2) $G \in L^p(\mathbf{P}), (p > 1)$ に対し、$\mathbb{C}$ 上の写像 $\zeta \mapsto \mathbb{E}\left[Ge^{\zeta X}\right]$ は正則関数となることを示せ。

解答. (1)。$e^{a|x|} \leq e^{ax} + e^{-ax}$ であるから、任意の a で $e^{aX} \in L^1(\mathbf{P})$ であることより、$\mathbb{E}[e^{a|X|}] \leq \mathbb{E}[e^{aX}] + \mathbb{E}[e^{-aX}] < \infty$ となって $e^{a|X|} \in L^1(\mathbf{P}), (\forall a \in \mathbb{R})$ がわかる。また、$\mathbb{E}[(e^{a|X|})^p] = \mathbb{E}[e^{ap|X|}] < \infty$ であるから、$e^{a|X|} \in L^p(\mathbf{P}), (\forall a \in R, \forall p \geq 1)$ もわかる。

(2)。$\zeta \in \mathbb{C}$ を任意にとり、ζ の近傍での微分可能性を示せば良い。十分大きい定数 $A > |\zeta|$ を一つ選ぶ ($A > \mathrm{Re}(\zeta)$ である)。このとき

$$\mathbb{E}\left[\left|XGe^{\zeta X}\right|\right] = \mathbb{E}\left[|XG|e^{|\mathrm{Re}(\zeta)X|}\right] < \mathbb{E}\left[|XG|e^{|AX|}\right]$$

である。$X < e^X$ であるから、任意の q に対して $X \in L^q(\mathbf{P})$ であることに注意すると、$G \in L^p(\mathbf{P})$ と任意の q に対して $X, e^{|AX|} \in L^q(\mathbf{P})$ であることから、ヘルダーの不等式より $|XG|e^{|AX|} \in L^1(\mathbf{P})$ がわかる。$Y :\overset{\mathrm{def}}{=} |XG|e^{|AX|}$ とおく。ζ に収束する点列 ζ_n を $|\zeta_n| < A$ となるようにとり、$X_n :\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{Ge^{\zeta_n X} - Ge^{\zeta X}}{\zeta_n - \zeta}$ と定める。平均値の定理より、$\theta_n \in \mathbb{C}$ であって $|\zeta - \theta_n| < |\zeta - \zeta_n|$ となるものが存在し、$X_n = XGe^{\theta_n X}$ となる。$\theta_n \to \zeta, (n \to \infty)$ と $|X_n| \leq Y$ に注意して、優収束定理により

$$\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}\left[XGe^{\zeta X}\right], (n \to \infty)$$

となる。とくに ζ_n の取り方によらずに同一の極限 $\mathbb{E}\left[XGe^{\zeta X}\right]$ を持つことから、$\zeta \mapsto \mathbb{E}\left[Ge^{\zeta X}\right]$ は正則であることがわかる。

練習問題 4.7. $p \geq 2$ とする。$f_t \in \mathcal{L}^2$ は任意の $T \geq 0$ に対して $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t|^p dt\right] < \infty$ を満たすとする。このとき

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T}\left|\int_0^t f_s dB_s^\alpha - \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha\right|^p\right] \to 0, \quad (n \to \infty), (\forall T \geq 0)$$

を満たす $f_t^n \in \mathcal{L}_0$ が存在することを示せ。

解答. 証明の方針は以下の通り：

(1) まず補題 4.5 と同じ議論により、$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - f_t^n|^p dt\right] \to 0, (n \to \infty)$ となる $f_t^n \in \mathcal{L}_0$ をとってくる。
(2) 次にモーメント不等式 (定理 4.27) を使って極限を評価する。

(1) を実行する。$g_t^n :\overset{\mathrm{def}}{=} (-n) \vee (f_t \wedge n)$ とおく。すると各 t, ω に対して $|g_t^n| \leq |f_t|$ であるから、とくに $g_t^n \in \mathcal{L}^2$ であり、さらに任意の $T \geq 0$ に対して $\mathbb{E}\left[\int_0^T |g_t^n|^p dt\right] < \infty$ を満たす。ここで優収束定理により $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - g_t^n|^p dt\right] \to 0$ であることに注意すると、L^p-ノルムが三角不等式を満たすこと (ミンコフスキーの不等式) から、g_n^t に対する所望の近似を求めることで f_t に対する所望の近似を得ることができる。よって、所望の近似を得るには、f_t は有界であると仮定して良い。

f_t は有界であると仮定する。$h_t^n :\overset{\mathrm{def}}{=} n\int_{(t-\frac{1}{n})\vee 0}^t f_s ds$ とおくと h_t^n は有界かつ連続であり、$\forall \omega$ に対してほとんど全ての t で $\lim_{n\to\infty} h_t^n(\omega) = f_t(\omega)$ である。有界収束定理により $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - h_t^n|^p dt\right] \to 0$ であることに注意して、前段落と同じ理由により f_t を有界かつ連続と仮定しても良い。

f_t は有界かつ連続であると仮定する。$f_t^n :\overset{\mathrm{def}}{=} f_{k/n}, t \in [k/n, (k+1)/n)$ と定めると、連続性により $f_t^n(\omega) \to f_t(\omega), (\forall t, \forall \omega)$ であるので、有界収束定理により $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - f_t^n|^p dt\right] \to 0$ となる。$f_t^n \in \mathcal{L}_0$ であるから、所望の近似を得ることができた。

(2) を実行する。今、$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_t - f_t^n|^p dt\right] \to 0$ となる $f_t^n \in \mathcal{L}_0$ が存在することがわかっている。$X_t :\overset{\mathrm{def}}{=}$

$\int_0^t (f_s - f_s^n)\, dB_s^\alpha$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f_s dB_s^\alpha - \int_0^t f_s^n dB_s^\alpha\right|^p\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t|^p\right] \\
&\overset{\bigstar}{\le} A_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (f_s - f_s^n)^2\, dt\right)^{p/2}\right] \\
&\overset{\spadesuit}{\le} A_p T^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_s - f_s^n|^p\, dt\right] \\
&\to 0, \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

となる。ただし $\bigstar$ の箇所はモーメント不等式 (定理 4.27) を用い、$\spadesuit$ の箇所はヘルダーの不等式 (例 1.14) を用いた。また、A_p は p のみに依存する定数である。以上で示された。

練習問題 4.8. B_t を 1 次元ブラウン運動とし、$T>0$ とする。

(1) $(T-t)B_t = \int_0^t (T-s)dB_s - \int_0^t B_s ds$ を示せ。
(2) $B_T^3 = \int_0^T f_t dB_t$ を満たす確率過程 $f_t \in \mathcal{L}^2$ を求めよ。

解答. (1)。$\int_0^t T dB_s = TB_t$ であるから、$tB_t = \int_0^t s dB_s + \int_0^t B_s ds$ を示せば良い。すなわち $d(sB_s) = sdB_s + B_s ds$ を示せば良いが、これは伊藤の積の公式 (例 4.16 (3)) より明らかである。

(2)。まず $d((B_t)^3) = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt$ であるから、

$$B_T^3 = \int_0^T (3B_s^2)dB_s + 3\int_0^T B_s ds$$

となる。(1) の等式に $t=T$ を代入すると、

$$\int_0^T B_s ds = \int_0^T (T-s)dB_s$$

がわかる。これを代入して、

$$B_T^3 = \int_0^T (3B_s^2)dB_s + 3\int_0^T B_s ds = \int_0^T (3B_s^2 + 3(T-s))dB_s$$

を得る。よって求める f_t は $f_t = 3B_t^2 + 3(T-t)$ である。

5 確率微分方程式 (I)

練習問題 5.1. $a \leq 0 \leq b, k \in \mathbb{N}$ とする。

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{:=} \begin{cases} (x-a)^{2k+1}, & (x < a), \\ 0, & (a \leq x \leq b), \\ (x-b)^{2k+1}, & (x > b), \end{cases}$$

と定義する。B_t を 1 次元ブラウン運動とし、$X_t \overset{\text{def}}{:=} \varphi(B_t)$ とおく。このとき X_t は次の確率微分方程式の解であることを示せ：

$$dX_t = (2k+1)X_t^{\frac{2k}{2k+1}} dB_t + k(2k+1)X_t^{\frac{2k-1}{2k+1}} dt.$$

解答. もとの問題文では $X_t \overset{\text{def}}{:=} \varphi(X_t)$ となっていたけどこれはたぶん間違いだと思う。

まず $\varphi(x)$ の二階微分を計算する。

$$\varphi'(x) = \begin{cases} (2k+1)(x-a)^{2k}, & (x < a), \\ 0, & (a \leq x \leq b), \\ (2k+1)(x-b)^{2k}, & (x > b), \end{cases}$$

であるから、とくに $\varphi'(x) = (2k+1)\varphi(x)^{\frac{2k}{2k+1}}$ である。また

$$\varphi''(x) = \begin{cases} 2k(2k+1)(x-a)^{2k-1}, & (x < a), \\ 0, & (a \leq x \leq b), \\ 2k(2k+1)(x-b)^{2k-1}, & (x > b), \end{cases}$$

であるから、とくに $\varphi''(x) = 2k(2k+1)\varphi(x)^{\frac{2k-1}{2k+1}}$ である。以上で φ は C^2-級である。ブラウン運動 B_t は定義から伊藤過程であるから、伊藤の公式より

$$\begin{aligned} dX_t &= d\varphi(B_t) \\ &= \varphi'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\varphi''(B_t)dt \\ &= (2k+1)\varphi(B_t)^{\frac{2k}{2k+1}} dB_t + k(2k+1)\varphi(B_t)^{\frac{2k-1}{2k+1}} dt \\ &= (2k+1)X_t^{\frac{2k}{2k+1}} dB_t + k(2k+1)X_t^{\frac{2k-1}{2k+1}} dt \end{aligned}$$

となる。これは所望の結果である。

練習問題 5.2. $n \in \mathbb{N}$ とする。もし 1 次元確率微分方程式

$$dX_t = \frac{1}{n}X_t^{n+1} dB_t + \frac{n+1}{2n^2}X_t^{2n+1} dt$$

の解 $X_t, t \geq 0$ が存在するならば

$$X_t = (1 - B_t)^{-\frac{1}{n}}, (t < \tau_1)$$

となることを示せ。ただし $\tau_1 \overset{\text{def}}{:=} \{t \geq 0 | B_t = 1\}$ である。これから上の確率微分方程式に解が存在しないことを導け。

解答. $t < \tau_1$ に対して X_t が上のように求まれば、$X_t, t \geq 0$ が連続 (かつ $\mathcal{F}_t$-発展的可測) な確率過程であることに反する ($t = \tau_1(\omega)$ で連続でない)。すなわちはじめの確率微分方程式に解が存在しないことになる。よって、はじめの確率微分方程式に解が存在すると仮定した上で、$t < \tau_1$ に対して X_t を求めれば良い。

仮定より、X_t は伊藤過程である。また、$(dX_t)^2 = \frac{1}{n^2} X_t^{2n+2} dt$ である。$Y_t :\overset{\mathrm{def}}{=} X_t^n$ とおけば、伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
dY_t &= d(X_t^n) \\
&= nX_t^{n-1} dX_t + \frac{1}{2} n(n-1) X_t^{n-2} (dX_t)^2 \\
&= nX_t^{n-1} \left(\frac{1}{n} X_t^{n+1} dB_t + \frac{n+1}{2n^2} X_t^{2n+1} dt \right) + \frac{1}{2} n(n-1) X_t^{n-2} \frac{1}{n^2} X_t^{2n+2} dt \\
&= X_t^{2n} dB_t + \frac{n+1}{2n} X_t^{3n} dt + \frac{n-1}{2n} X_t^{3n} dt \\
&= X_t^{2n} dB_t + X_t^{3n} dt \\
&= Y_t^2 dB_t + Y_t^3 dt
\end{aligned}
$$

となる。とくに $(dY_t)^2 = Y_t^4 dt$ である。$Z_t :\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{Y_t}$ とおけば、伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= d\left(\frac{1}{Y_t} \right) \\
&= -\frac{1}{Y_t^2} dY_t + \frac{1}{Y_t^3} (dY_t)^2 \\
&= -(dB_t + Y_t dt) + Y_t dt \\
&= -dB_t
\end{aligned}
$$

となる。また、初期条件 $X_0 = 1$ より $Z_0 = 1$ であるから、$\int_0^t$ で積分することで

$$Z_t = 1 - B_t$$

を得る。以上より $t < \tau_1$ に対して

$$X_t = Y_t^{\frac{1}{n}} = Z_t^{-\frac{1}{n}} = (1 - B_t)^{-\frac{1}{n}}$$

となることがわかった。

練習問題 5.3. $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ とする。$\mathbb{R}^d$ 上の確率微分方程式

$$dX_t = dB_t + AX_t dt, \quad X_0 = x$$

の解 X_t^x を求めよ。また

$$J_t^x :\overset{\mathrm{def}}{=} \partial_x X_t^x = \left(\frac{\partial X_t^{x,i}}{\partial x^j} \right)_{1 \leq i,j \leq N}$$

を求めよ。

解答. 行列 P に対して $e^P :\overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n \geq 0} \frac{P^n}{n!}$ とおく。

$$d\left(e^{-At} X_t \right) = e^{-At} \left(-AX_t dt + dX_t \right) = e^{-At} dB_t = e^{-At} \circ dB_t$$

であるから、

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^{B_t^j} \left(e^{-At}\right)_j^i dt$$

となる (j で和をとっている)。また定理 5.16 より J_t^x は (確率) 微分方程式

$$dJ_t^x = AJ_t^x dt, \quad J_0^x = I$$

を満たすので、

$$J_t^x = e^{At}$$

となる。

練習問題 5.4. $d = N = 1, V \in C_d^\infty(\mathbb{R})$ とする。C^∞-級関数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は微分方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x, \xi) = V(\varphi(x, \xi)), \varphi(x, 0) = x$$

を満たすとする。

(1) $X_t^x :\overset{\text{def}}{=} \varphi(x, B_t)$ の満たす Stratonovich 型の確率微分方程式を求めよ。
(2) $J_t^x :\overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} X_t^x = \exp\left(\int_0^{B_t} V'(\varphi(x, \eta)) d\eta\right)$ を示せ。

解答. 解答に入る前に Stratonovich 積分に関するちょっとした注意をする。Stratonovich 積分の定義と伊藤の公式から、

$$f'(X_t) \circ dX_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}d\left(f'(X_t)\right)dX_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 = d\left(f(X_t)\right)$$

となる。従って、これを積分することで、

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(X_t) \circ dX_t = f(X_{t_2}) - f(X_{t_1})$$

を得る。とくに f は原始関数 $\int_0^t f(u)du$ の t での微分として表示できることから、

$$\int_{t_1}^{t_2} f(X_t) \circ dX_t = \int_{X_{t_1}}^{X_{t_2}} f(t)dt$$

となる (変数変換公式のような感じ？)。また、$YdZ + \frac{1}{2}dYdZ = Y \circ dZ = dW$ となる W があれば、

$$\begin{aligned}
X \circ (Y \circ dZ) &= X \circ dW = XdW + \frac{1}{2}dXdW \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}XdYdZ + \frac{1}{2}YdXdZ + \frac{1}{4}dXdYdZ \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}XdYdZ + \frac{1}{2}YdXdZ \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}(d(XY)dZ) - \frac{1}{2}dXdYdZ \\
&= XYdZ + \frac{1}{2}(d(XY)dZ) \\
&= (XY) \circ dZ
\end{aligned}$$

となる。

(1)。x を定数と考えて普通に X_t^x を微分する。Stratonovich 積分で書けば、

$$\begin{aligned} d(X_t^x) &= d\left(\varphi(x, B_t)\right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x, \xi)\bigg|_{\xi = B_t} \circ dB_t \\ &= V(\varphi(x, B_t)) \circ dB_t \\ &= V(X_t^x) \circ dB_t \end{aligned}$$

となる。

(2)。J_t^x は定理 5.16 より

$$dJ_t^x = V'(X_t^x) J_t^x \circ dB_t = J_t^x \circ (V'(X_t^x) \circ dB_t)$$

を満たすので、

$$\begin{aligned} d\left(\log(J_t^x)\right) &= \frac{1}{J_t^x} \circ dJ_t^x \\ &= \frac{1}{J_t^x} \circ (J_t^x \circ (V'(X_t^x) \circ dB_t)) \\ &= V'(X_t^x) \circ dB_t \\ &= V'(\varphi(x, B_t)) \circ dB_t \end{aligned}$$

となる。これを $\int_0^t$ で積分すれば、定理 5.16 より $J_0^x = 1$ なので、

$$\log J_t^x = \int_0^t V'(\varphi(x, B_t)) \circ dB_t = \int_0^{B_t} V'(\varphi(x, \eta)) d\eta$$

となる。これは所望の結果である。

練習問題 5.5. 補題 5.13 の $|\mathbf{k}| \geq 2$ の場合の証明を完了せよ。

解答. $|\mathbf{k}|$ に関する帰納法で証明する。$|\mathbf{k}| = 0, 1$ の場合は本文中で証明が完了しているので、$\mathbf{h} < \mathbf{k}$ となるすべての $\mathbf{h}$ に対して証明できているとして、$\mathbf{k}$ の場合を証明する。$t \leq T$ とする。

補題 5.13 の証明中の最後の等式

$$\begin{aligned} \partial_x^{\mathbf{k}} X_t^{(n),x} = \partial^{\mathbf{k}} \iota(x) &+ \sum_{\alpha=0}^{d} \int_0^t \partial V_\alpha \left(X_{[s)_n}^{(n),x} \right) \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} dB_s^\alpha \\ &+ \sum_{2 \leq |\mathbf{h}|, \mathbf{h} < \mathbf{k}} \sum_{\alpha=0}^{d} \int_0^t \left(\partial^{\mathbf{k}} V_\alpha \right) \left(X_{[s)_n}^{(n),x} \right) \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{[s)_n}^{(n),x} \right] dB_s^\alpha \\ &+ \sum_{m=0}^{[2^n t)-1} \left(\hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x} \partial_x^{\mathbf{k}} X_{T_{n,m}}^{(n),x} + \sum_{2 \leq |\mathbf{h}|, \mathbf{h} < \mathbf{k}} \hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x,\mathbf{h}} \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{T_{n,m}}^{(n),x} \right] \right) \\ &+ \hat{R}_t^{n,[2^n t),x} \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[t)_n}^{(n),x} + \sum_{2 \leq |\mathbf{h}|, \mathbf{h} < \mathbf{k}} \hat{R}_t^{n,[2^n t),x,\mathbf{h}} \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{[s)_n}^{(n),x} \right] \end{aligned}$$

を用いる (本文中の式は第四項の和の中の $\hat{R}$ の添字が t となっているが、これは $T_{n,m}$ の間違いであると思われる)。ここで $\hat{R}$ は、t, x, n, m に依存しない定数 C_8, C_9 により

$$|\hat{R}_t^{n,m,x}| + |\hat{R}_t^{n,m,x,\mathbf{h}}| \leq C_8 |\xi_t^{n,m}|^2 e^{C_9 |\xi_t^{n,m}|} \tag{†}$$

と評価できる確率過程であり、$\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}[f]$ は $\partial_x^{\mathbf{h}} f$ についてのある多項式である。各項を評価する。

帰納法の仮定より、すべての自然数 p に対し、$x, n, 0 \leq m \leq [2^n T)$ と $2 \leq |\mathbf{h}|, \mathbf{h} < \mathbf{k}$ に依存しない定数 $C_{10}(p)$ が存在して

$$|\partial_x^{\mathbf{h}} X_{T_{n,m}}^{(n),x}|^p \leq C_{10}(p)$$

となる。従って、とくにある定数 C_{10} が存在して、すべての $n, x, 0 \leq m \leq [2^n T)$ に対し、

$$\left|\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}\left[X_{T_{n,m}}^{(n),x}\right]\right| \leq C_{10}$$

となる。

V_α のすべての偏導関数が有限であることから、とくにある定数 C_{11} が存在して、すべての $\alpha = 0, 1, \cdots, d$ とすべての $2 \leq |\mathbf{h}|, \mathbf{h} < \mathbf{k}$ に対して $|V_\alpha| < C_{11}$ となる。従って、第三項は、ある定数 C_{12} を用いて、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\sum_{\alpha=0}^{d}\int_0^s \left(\partial^{\mathbf{k}}V_\alpha\right)\left(X_{[u)_n}^{(n),x}\right)\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}\left[X_{[u)_n}^{(n),x}\right]dB_u^\alpha\right|^p\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\sum_{\alpha=0}^{d}\int_0^s \left|\left(\partial^{\mathbf{k}}V_\alpha\right)\left(X_{[u)_n}^{(n),x}\right)\right|\left|\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}\left[X_{[u)_n}^{(n),x}\right]\right|dB_u^\alpha\right|^p\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\sum_{\alpha=0}^{d}\int_0^s C_{10}C_{11}dB_u^\alpha\right|^p\right] \\
&\overset{\bigstar}{\leq} A_p C_{10}C_{11}\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\sum_{\alpha=0}^{d}\int_0^s du\right|^{\frac{p}{2}}\right] \\
&= C_{12}
\end{aligned}$$

と評価できる。ただし ★ の箇所はモーメント不等式を用いた。

第四項と第五項のうち和 $\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\sum_{\alpha=0}^{d}$ の部分を評価する。式 (†) より、

$$|\hat{R}_t^{n,m,x,\mathbf{h}}| \leq |\hat{R}_t^{n,m,x}| + |\hat{R}_t^{n,m,x,\mathbf{h}}| \leq C_8|\xi_t^{n,m}|^2 e^{C_9|\xi_t^{n,m}|}$$

であることに注意すると、ある定数 C_{13}, C_{14} を用いて、

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{s\leq t}\left|\sum_{m=0}^{[2^n s)-1}\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x,\mathbf{h}}\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}\left[X_{T_{n,m}}^{(n),x}\right]+\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\hat{R}_s^{n,[2^n s),x,\mathbf{h}}\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}\left[X_{[s)_n}^{(n),x}\right]\right|\right\|_p \\
&\overset{\bigstar}{\leq}\left\|\sup_{s\leq t}\left(\sum_{m=0}^{[2^n s)-1}\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\left|\hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x,\mathbf{h}}\right|\left|\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}\left[X_{T_{n,m}}^{(n),x}\right]\right|+\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}\left|\hat{R}_s^{n,[2^n s),x,\mathbf{h}}\right|\left|\Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}}\left[X_{[s)_n}^{(n),x}\right]\right|\right)\right\|_p \\
&\leq \left\|\sup_{s\leq t}\left(\sum_{m=0}^{[2^n s)-1}\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}C_8|\xi_{T_{n,m}}^{n,m}|^2 e^{C_9|\xi_{T_{n,m}}^{n,m}|}C_{10}+\sum_{2\leq|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}}C_8|\xi_s^{n,[s)_n}|^2 e^{C_9|\xi_s^{n,[s)_n}|}C_{10}\right)\right\|_p \\
&\leq C_{13}\left\|\sum_{m=0}^{[2^n t)}\sup_{s\leq t}\left(|\xi_s^{n,m}|^2 e^{C_9|\xi_s^{n,m}|}\right)\right\|_p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\spadesuit}{\leq} C_{13}\sum_{m=0}^{[2^n t)}\left\|\sup_{s\leq t}|\xi_s^{n,m}|^2\right\|_{2p}\left\|\sup_{s\leq t}e^{C_9|\xi_s^{n,m}|}\right\|_{2p}\\
&\overset{\clubsuit}{\leq} C_{13}\sum_{m=0}^{[2^n t)}K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\left(t\wedge T_{n,m+1}-t\wedge T_{n,m}\right)^{\frac{4p/2}{2p}}\left\|\sup_{s\leq t}e^{C_9|\xi_s^{n,m}|}\right\|_{2p}\\
&= C_{13}\sum_{m=0}^{[2^n t)}K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\left(t\wedge T_{n,m+1}-t\wedge T_{n,m}\right)^{\frac{4p/2}{2p}}\left\|\exp\left(C_9\sup_{s\leq t}|\xi_s^{n,m}|\right)\right\|_{2p}\\
&\leq C_{13}K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\sum_{m=0}^{[2^n t)}\frac{1}{[2^n t)}\left\|\exp\left(C_9\sup_{s\leq t}|\xi_s^{n,m}|\right)\right\|_{2p}\\
&= C_{13}K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\sum_{m=0}^{[2^n t)}\frac{1}{[2^n t)}\left\|\exp\left(C_9\sup_{s\leq t}\sqrt{\sum_\alpha(B^\alpha_{s\wedge T_{n,m+1}}-B^\alpha_{s\wedge T_{n,m}})^2}\right)\right\|_{2p}\\
&\leq C_{13}K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\sum_{m=0}^{[2^n t)}\frac{1}{[2^n t)}\left\|\exp\left(C_9\sup_{s\leq t}\left(\sqrt{\sum_\alpha(B_{s\wedge T_{n,m+1}})^2}+\sqrt{\sum_\alpha(B_{s\wedge T_{n,m}})^2}\right)\right)\right\|_{2p}\\
&\leq C_{13}K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\sum_{m=0}^{[2^n t)}\frac{1}{[2^n t)}\left\|\exp\left(2C_9\sup_{s\leq t}\left(\sqrt{\sum_\alpha(B^\alpha_s)^2}\right)\right)\right\|_{2p}\\
&= C_{13}K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\left\|\exp\left(2C_9\sup_{s\leq t}|B_s|\right)\right\|_{2p}\\
&\overset{\heartsuit}{\leq} C_{14}
\end{aligned}
$$

と評価できる。ただし ★ の箇所はミンコフスキーの不等式を用い、♠ の箇所はヘルダーの不等式とミンコフスキーの不等式を用い、♣ の箇所は式 (5.19) を用い、♡ の箇所は定理 3.11 を用いた。以上で $\partial_x^{\mathbf{k}}X_{T_{n,m}}^{(n),x}$ のかかっていない項はすべて定数で上から評価できることがわかった。

$\partial_x^{\mathbf{k}}X_t^{(n),x}$ のかかる項を評価する。第二項を評価する。式 (5.38) よりすべての $0\leq t\leq T$ に対して $\partial_x^{\mathbf{k}}X_t^{(n),x}\in\mathcal{L}^2$ であるから、$\alpha\neq 0$ の場合はある定数 C_{15} を用いて

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^s\partial V_\alpha\left(X_{[u)_n}^{(n),x}\right)\partial_x^{\mathbf{k}}X_{[u)_n}^{(n),x}dB_u^\alpha\right|^p\right]\\
&\overset{\bigstar}{\leq}(\text{定数倍})\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^s\partial_x^{\mathbf{k}}X_{[u)_n}^{(n),x}dB_u^\alpha\right|^p\right]\\
&\overset{\spadesuit}{\leq}(\text{定数倍})\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\left(\partial_x^{\mathbf{k}}X_{[s)_n}^{(n),x}\right)^2ds\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\
&\overset{\clubsuit}{\leq}C_{15}\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\partial_x^{\mathbf{k}}X_{[s)_n}^{(n),x}\right|^pds\right]\\
&\overset{\heartsuit}{=}C_{15}\int_0^t\mathbb{E}\left[\left|\partial_x^{\mathbf{k}}X_{[s)_n}^{(n),x}\right|^p\right]ds
\end{aligned}
$$

と評価できる。ただし ★ の箇所は V_α のすべての偏導関数が有界であることを用い、♠ の箇所はモーメント不等式を用い、♣ の箇所はヘルダーの不等式を用い、♡ の箇所はフビニの定理 (式 (5.38) より今の状況で使

うことができる) を用いた。$\alpha=0$ の場合はある定数 C_{16} を用いて

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^s \partial V_\alpha\left(X^{(n),x}_{[u]_n}\right)\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[u]_n} dB^\alpha_u\right|^p\right]\\
&\overset{\bigstar}{\le} (\text{定数倍})\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^s \partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[u]_n} du\right|^p\right]\\
&\overset{\spadesuit}{\le} (\text{定数倍})\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\int_0^s \left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[u]_n}\right|^p du\right]\\
&\le C_{16}\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[s]_n}\right|^p ds\right]\\
&\overset{\clubsuit}{=} C_{16}\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[s]_n}\right|^p\right] ds
\end{aligned}$$

と評価できる。ただし ★ の箇所は V_α のすべての偏導関数が有界であることを用い、♠ の箇所はヘルダーの不等式を用い、♣ の箇所はフビニの定理を用いた。とくに、$\alpha=0,\cdots,d$ に対して、ある定数 $C_{15}, C_{16}\le C_{17}$ を用いて、

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\sum_{\alpha=0}^d\int_0^s \partial V_\alpha\left(X^{(n),x}_{[u]_n}\right)\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[u]_n} dB^\alpha_u\right|^p\right]\le C_{17}\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[s]_n}\right|^p\right] ds$$

と評価できる。

第四項と第五項の残っている部分は、ある定数 C_{18} を用いて、

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{s\le t}\left|\sum_{m=0}^{[2^n s)-1}\hat{R}^{n,m,x}_{T_{n,m}}\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}+\hat{R}^{n,[s)_n,x}_s\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[s)_n}\right|\right\|_p\\
&\overset{\bigstar}{\le}\left\|\sup_{s\le t}\left(\sum_{m=0}^{[2^n s)-1}\left|\hat{R}^{n,m,x}_{T_{n,m}}\right|\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right|+\left|\hat{R}^{n,[s)_n,x}_s\right|\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[s)_n}\right|\right)\right\|_p\\
&\le\left\|\sum_{m=0}^{[2^n t)-1}\left|\hat{R}^{n,m,x}_{T_{n,m}}\right|\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right|+\left|\hat{R}^{n,[t)_n,x}_t\right|\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[t)_n}\right|\right\|_p\\
&\le\left\|\sum_{m=0}^{[2^n t)-1}\left(\sup_{s\le t}\left|\hat{R}^{n,m,x}_s\right|\right)\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right|+\left(\sup_{s\le t}\left|\hat{R}^{n,[t)_n,x}_s\right|\right)\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{[t)_n}\right|\right\|_p\\
&=\left\|\sum_{m=0}^{[2^n t)}\left(\sup_{s\le t}\left|\hat{R}^{n,m,x}_s\right|\right)\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right|\right\|_p\\
&\overset{\spadesuit}{\le}\left\|\sum_{m=0}^{[2^n t)}\left(\sup_{s\le t}\left(C_8|\xi^{n,m}_s|^2 e^{C_9|\xi^{n,m}_s|}\right)\right)\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right|\right\|_p\\
&\overset{\clubsuit}{\le} C_8\sum_{m=0}^{[2^n t)}\left\|\sup_{s\le t}|\xi^{n,m}_s|^2 e^{C_9|\xi^{n,m}_s|}\left|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right|\right\|_p\\
&\overset{\heartsuit}{\le} C_8\sum_{m=0}^{[2^n t)}\left\|\sup_{s\le t}|\xi^{n,m}_s|^2 e^{C_9|\xi^{n,m}_s|}\right\|_p\left\|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right\|_p\\
&\overset{\diamondsuit}{\le} C_8 K_{4p}^{\frac{1}{2p}}\left\|\exp\left(2C_9\sup_{s\le t}|B_s|\right)\right\|_p\sum_{m=0}^{[2^n t)}(t\wedge T_{n,m+1}-t\wedge T_{n,m})\left\|\partial^{\mathbf{k}}_x X^{(n),x}_{T_{n,m}}\right\|_p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_8 K_{4p}^{\frac{1}{2p}} \left\| \exp\left(2C_9 \sup_{s\le t} |B_s| \right) \right\|_p \int_0^t \left\| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right\|_p ds \\
&\overset{\star\star}{\le} C_{18} \int_0^t \left\| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right\|_p ds
\end{aligned}
$$

と評価できる。ただし ★ の箇所はミンコフスキーの不等式を用い、♠ の箇所は式 (†) を用い、♣ の箇所はミンコフスキーの不等式を用い、♡ の箇所は $B_{s\wedge T_{n,m+1}} - B_{s\wedge T_{n,m}}$ と $X_{T_{n,m}}^{(n),x}$ が独立であることから従う $\sup_{s\le t} |\xi_s^{n,m}|^2 e^{C_9|\xi_s^{n,m}|}$ と $\partial_x^{\mathbf{k}} X_{T_{n,m}}^{(n),x}$ の独立性を用い、♢ の箇所は $\partial_x^{\mathbf{k}} X_{T_{n,m}}^{(n),x}$ のかかっていない第四項と第五項の評価と同様の評価を行い、⋆⋆ の箇所は任意の $r>0$ に対して $\mathbb{E}\left[\exp\left(r\sup_{t\le T}|B_t|\right)\right] < \infty$ であることを用いた。

以上より、定数 C_{19}, C_{20} を用いて

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} \left| \partial_x^{\mathbf{k}} X_s^{(n),x} - \partial^{\mathbf{k}} \iota(x) \right|^p \right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sup_{s\le t} \Bigg| \sum_{\alpha=0}^d \int_0^s \partial V_\alpha \left(X_{[u)_n}^{(n),x} \right) \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[u)_n}^{(n),x} dB_u^\alpha \\
&\qquad + \sum_{2\le|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}} \sum_{\alpha=0}^d \int_0^s \left(\partial^{\mathbf{k}} V_\alpha \right) \left(X_{[u)_n}^{(n),x} \right) \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{[u)_n}^{(n),x} \right] dB_u^\alpha \\
&\qquad + \sum_{m=0}^{[2^n s)-1} \left(\hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x} \partial_x^{\mathbf{k}} X_{T_{n,m}}^{(n),x} + \sum_{2\le|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}} \hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x,\mathbf{h}} \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{T_{n,m}}^{(n),x} \right] \right) \\
&\qquad + \hat{R}_s^{n,[2^n t),x} \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} + \sum_{2\le|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}} \hat{R}_s^{n,[2^n s),x,\mathbf{h}} \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{[s)_n}^{(n),x} \right] \Bigg|^p \Bigg] \\
&\overset{\star}{\le} \Bigg(\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} \left| \sum_{\alpha=0}^d \int_0^s \partial V_\alpha \left(X_{[u)_n}^{(n),x} \right) \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[u)_n}^{(n),x} dB_u^\alpha \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} \left| \sum_{2\le|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}} \sum_{\alpha=0}^d \int_0^s \left(\partial^{\mathbf{k}} V_\alpha \right) \left(X_{[u)_n}^{(n),x} \right) \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{[u)_n}^{(n),x} \right] dB_u^\alpha \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} \left| \sum_{m=0}^{[2^n t)-1} \hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x} \partial_x^{\mathbf{k}} X_{T_{n,m}}^{(n),x} + \hat{R}_s^{n,[2^n t),x} \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} \left| \sum_{m=0}^{[2^n t)-1} \sum_{2\le|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}} \hat{R}_{T_{n,m}}^{n,m,x,\mathbf{h}} \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{T_{n,m}}^{(n),x} \right] + \sum_{2\le|\mathbf{h}|,\mathbf{h}<\mathbf{k}} \hat{R}_s^{n,[2^n s),x,\mathbf{h}} \Phi_{\mathbf{h}}^{\mathbf{k}} \left[X_{[s)_n}^{(n),x} \right] \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \Bigg)^p \\
&\overset{\spadesuit}{\le} \left(C_{17}^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t \mathbb{E}\left[\left| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right|^p \right] ds \right)^{\frac{1}{p}} + C_{12}^{\frac{1}{p}} + C_{18} \left(\int_0^t \left\| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right\|_p ds \right) + C_{14} \right)^p \\
&\overset{\heartsuit}{\le} 4^{p-1} \left(C_{17} \int_0^t \mathbb{E}\left[\left| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right|^p \right] ds + C_{12} + C_{18}^p \left(\int_0^t \left\| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right\|_p ds \right)^p + C_{14}^p \right) \\
&\overset{\diamondsuit}{\le} 4^{p-1} \left(C_{17} \int_0^t \mathbb{E}\left[\left| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right|^p \right] ds + C_{12} + C_{18}^p \int_0^t \mathbb{E}\left[\left| \partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s)_n}^{(n),x} \right|^p \right] ds + C_{14}^p \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{19} + C_{20} \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s]_n}^{(n),x}\right|^p\right] ds \\
&\overset{\star\star}{\leq} C_{19} + C_{20} 2^p \left(\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\partial^{\mathbf{k}} \iota(x)\right|^p\right] ds + \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s]_n}^{(n),x} - \partial^{\mathbf{k}} \iota(x)\right|^p\right] ds\right) \\
&\leq C_{19} + C_{20} 2^p T + C_{20} 2^p \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s]_n}^{(n),x} - \partial^{\mathbf{k}} \iota(x)\right|^p\right] ds \\
&\leq C_{19} + C_{20} 2^p T + C_{20} 2^p \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{s \leq u}\left|\partial_x^{\mathbf{k}} X_{[s]_n}^{(n),x} - \partial^{\mathbf{k}} \iota(x)\right|^p\right] du
\end{aligned}
$$

となる。ただし ★ の箇所はミンコフスキーの不等式を用い、♠ の箇所でこれまでに得られた評価を用い、♡ の箇所は凸不等式を用い、♢ の箇所は第三項にヘルダーの不等式を用い、$\star\star$ の箇所は凸不等式を用いた。よってグロンウォールの不等式より、$n = 1, 2, \cdots$ と $x \in \mathbb{R}^N$ によらずに

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t}\left|\partial_x^{\mathbf{k}} X_s^{(n),x} - \partial^{\mathbf{k}} \iota(x)\right|^p\right] \\
&\leq C_{19} + C_{20} 2^p T + C_{20} 2^p \int_0^t \left(C_{19} + C_{20} 2^p T\right) e^{a(t-s)} ds \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

が成立する。以上で示された。

練習問題 5.6. $C : [0, T] \to \mathbb{R}^{d \times d}$ は連続、$A : [0, T] \to \mathbb{R}^{d \times d}$ は C^1-級であり、

$$
\frac{d}{dt} A(t) = C(t) A(t)
$$

を満たすとする。このとき

$$
\frac{d}{dt} \det A(t) = (\operatorname{tr} C(t)) \det A(t)
$$

となることを示せ。

解答. $t \in [0, T]$ を任意にとる。t の近傍で恒等的に $\det A(t) = 0$ である場合には所望の等式は自明に成立する。従って t の任意の近傍に対して $\det A(u) \neq 0$ となる点 u が存在すると仮定して良い。

$\det A(u) \neq 0$ となる任意の点 u で所望の等式を証明することができたと仮定する。$\det A(t)$ は C^1-級で $\operatorname{tr} C(t)$ は連続なので、所望の等式の両辺は連続である。従って $\det A(t) = 0$ となる点 t の任意の近傍で $\det A(u_n) \neq 0$ となる点 u_n をとり、等式

$$
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=u_n} \det A(t) = (\operatorname{tr} C(u_n)) \det A(u_n)
$$

の両辺で $u_n \to t$ の極限をとることで、点 t においても等式

$$
\frac{d}{dt} \det A(t) = (\operatorname{tr} C(t)) \det A(t)
$$

が成立することがわかる。従って $\det A(t) \neq 0$ と仮定しても良い。このとき t の十分小さい近傍の点 u に対して $\det A(u) \neq 0$ である。

十分小さい $\varepsilon > 0$ と任意の行列 A に対して

$$
\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + O(\varepsilon^2)
$$

であるから、A が可逆行列で B が任意の行列であるとき、

$$
\begin{aligned}
\det(A+\varepsilon B) &= \det A\left(\det(I+\varepsilon A^{-1}B)\right)\\
&= (\det A)\left(1+\varepsilon\operatorname{tr}(A^{-1}B)\right)\\
&= \det A+\varepsilon\,(\det A)\operatorname{tr}(A^{-1}B)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

となる。従って、

$$
\begin{aligned}
\det A(t+\varepsilon) &= \det\left(A(t)+\varepsilon\frac{d}{dt}A(t)+O(\varepsilon^2)\right)\\
&= \det A(t)+\varepsilon\,(\det A(t))\operatorname{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

となる。以上より、$A(t)$ が可逆となる t に対しては

$$
\frac{d}{dt}\det A(t) = (\det A(t))\operatorname{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right) = (\det A(t))\operatorname{tr}C(t)
$$

となり、所望の結果が得られた。

追記：2020.7.2。これ見ながら思ったけど、$\det A(t)\neq 0$ となるような微妙な近傍とかを調整しなくても普通に $\det A(t+\varepsilon)$ を展開すれば証明できると思った。つまり、

$$
\begin{aligned}
\det A(t+\varepsilon) &= \det\left(A(t)+\varepsilon\frac{d}{dt}A(t)+O(\varepsilon^2)\right)\\
&\overset{\bigstar}{=} \det\left(A(t)+\varepsilon A(t)C(t)+O(\varepsilon^2)\right)\\
&= \det A(t)\det\left(I+\varepsilon C(t)\right)+O(\varepsilon^2)\\
&= \det A(t)\left(1+\varepsilon\operatorname{tr}C(t)\right)+O(\varepsilon^2)\\
&= \det A(t)+\varepsilon\det A(t)\operatorname{tr}C(t)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

ってなる。★ の箇所は条件の微分方程式を使う。

練習問題 5.7. $V_\alpha=(V_\alpha^1,\cdots,V_\alpha^d)\in C_b^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ は

$$
V_\alpha^\beta(x)=\delta_\alpha^\beta-\frac{x_\alpha x_\beta}{|x|^2},\quad \left(\frac{1}{2}\leq|x|\leq 2\right)
$$

を満たすとする。X_t^x を確率微分方程式

$$
dX_t=\sum_{\alpha=1}^d V_\alpha(X_t)\circ dB_t^\alpha,\quad X_0=x
$$

の解とする。写像 $x\mapsto X_t^x$ を $S^{d-1}=\left\{x\in\mathbb{R}^d\middle||x|=1\right\}$ に制限すれば、S^{d-1} 上の微分同相写像になることを示せ。

解答. 定理 5.18 より、X_t^x は t (と ω) を固定するごとに x を変数とする $\mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^d$ への微分同相写像であるから、$|x|=1$ であるときにすべての $t\in[0,\infty)$ (と ω) に対して $|X_t^x|=1$ であることを証明すれば良い。

新たな確率過程を

$$
Y_t^x :\overset{\text{def}}{=} \sum_\alpha (X_t^{x,\alpha})^2 = |X_t^x|^2
$$

と定義する。$Y_0^x = |x|^2$ である。伊藤の公式より、

$$
\begin{aligned}
d\left(Y_t^x\right) &= \sum_\alpha d\left((X_t^{x,\alpha})^2\right) \\
&= 2\sum_\alpha X_t^{x,\alpha} \circ dX_t^{x,\alpha} \\
&= 2\sum_\alpha X_t^{x,\alpha} \circ \sum_\beta V_\beta^\alpha(X_t^x) \circ dB_t^\beta \\
&= 2\sum_{\alpha,\beta} \left(X_t^{x,\alpha} V_\beta^\alpha(X_t^x)\right) \circ dB_t^\beta
\end{aligned}
$$

となる。$|x| = 1$ とすれば、十分小さい $0 < t < \varepsilon$ に対して $\frac{1}{2} \leq |X_t^x| \leq 2$ であるから、十分小さい $0 < t < \varepsilon$ に対しては

$$
\begin{aligned}
Y_t^x - |x|^2 &= 2\int_0^t \sum_{\alpha,\beta} \left(X_t^{x,\alpha} V_\beta^\alpha(X_t^x)\right) \circ dB_t^\beta \\
&= 2\int_0^t \sum_{\alpha,\beta} X_t^{x,\alpha} \left(\delta_\alpha^\beta - \frac{X_t^{x,\alpha} X_t^{x,\beta}}{|X_t^x|}\right) \circ dB_t^\beta \\
&= 2\int_0^t \left(\sum_\alpha X_t^{x,\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} \frac{\left(X_t^{x,\alpha}\right)^2 X_t^{x,\beta}}{|X_t^x|}\right) \circ dB_t^\beta \\
&= 2\int_0^t \left(\sum_\alpha X_t^{x,\alpha} - \sum_\beta X_t^{x,\beta}\right) \circ dB_t^\beta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。従って、十分小さいすべての $0 < t < \varepsilon$ に対して $|X_t^x|^2 = Y_t^x = |x|^2 = 1$ が成立することがわかる。$|X_t^x|^2 = 1$ が成立する最大の t に対して時刻変更を行って同様のことを繰り返せば、全ての $t \in [0, \infty)$ に対して $|X_t^x| = 1$ となることがわかる。以上で示された。

練習問題 5.8. 式 (5.48) を示せ。

解答. $B_\bullet^{(\sigma_m)}$ は $\mathcal{F}_{\sigma_m}$ と独立であり、$X_{\sigma_m}^{(n),x}$ は $\mathcal{F}_{\sigma_m}$-可測である。なので練習問題 1.7の解答で示した主張 (†) をこの場合にそのまま適用するだけで良い。

6　確率微分方程式 (II)

練習問題 6.1. β_t を 3 次元ブラウン運動、$0 \neq y \in \mathbb{R}^3$ とする。$Y_t :\overset{\mathrm{def}}{=} |y + \beta_t|^{-1}$ を利用して $d = N = 1$ に対する確率微分方程式

$$dX_t = X_t^2 dB_t, \quad X_0 = x > 0$$

は弱い解を持つことを確かめよ。

解答. $Z_t :\overset{\mathrm{def}}{=} Y_t^{-1} = |y + \beta_t|$ とおく。伊藤の公式より、

$$\begin{aligned}
dZ_t &= \frac{1}{2Z_t} d\left(\sum_{i=1}^{3} (y^i + \beta_t^i)^2\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4Z_t^3} \left(d\left(\sum_{i=1}^{3} (y^i + \beta_t^i)^2\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2Z_t} \sum_{i=1}^{3} \left(2(y^i + \beta_t^i) d\beta_t^i + \frac{1}{2} \cdot 2dt\right) - \frac{1}{8Z_t^3} \sum_{i=1}^{3} 4(y^i + \beta_t^i)^2 dt \\
&= \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^{3} (y^i + \beta_t^i) d\beta_t^i + \frac{3}{2Z_t} dt - \frac{1}{2Z_t} dt \\
&= \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^{3} (y^i + \beta_t^i) d\beta_t^i + \frac{1}{Z_t} dt
\end{aligned}$$

となる。よって $(dZ_t)^2 = dt$ であり、

$$\begin{aligned}
dY_t &= d\left(\frac{1}{Z_t}\right) \\
&= -\frac{1}{Z_t^2} dZ_t + \frac{1}{Z_t^3} (dZ_t)^2 \\
&= -\frac{1}{Z_t^3} \sum_{i=1}^{3} (y^i + \beta_t^i) d\beta_t^i - \frac{1}{Z_t^3} dt + \frac{1}{Z_t^3} dt \\
&= -\frac{1}{Z_t^3} \sum_{i=1}^{3} (y^i + \beta_t^i) d\beta_t^i \\
&= -Y_t^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{y^i + \beta_t^i}{|y + \beta_t|} d\beta_t^i
\end{aligned}$$

を得る。定理 4.20 (1) (b) より $\mathbf{P}$-a.s. に $Z_t > 0$ であるから、$i = 1, 2, 3$ に対して $\frac{y^i + \beta_t^i}{|y + \beta_t|} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ である。よって

$$B_t :\overset{\mathrm{def}}{=} -\int_0^t \sum_{i=1}^{3} \frac{y^i + \beta_t^i}{|y + \beta_t|} d\beta_t^i$$

は well-defined であり、さらに定理 4.17 より B_t は $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動である。また、$dB_t = -\sum_{i=1}^{3} \frac{y^i + \beta_t^i}{|y + \beta_t|} d\beta_t^i$ であるから、

$$dY_t = Y_t^2 dB_t$$

である。さらに、($\mathbf{P}$-a.s. に) Y_t は連続であり、かつ発展的可測である。各 ω について Y_t^2 は連続なので、$Y_t^2 \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ である。以上より、Y_t は確率微分方程式

$$dY_t = Y_t^2 dB_t$$

の解であるための条件 (定義 5.2) (i),(ii) を満たす。

(iii) を満たすことを証明する。$\sigma_r^y \overset{\text{def}}{:=} \{t \geq 0 || \beta_t| = r\}$ とおけば、$0 < r < |y|$ に対して

$$Y_{t\wedge\sigma_r^y} = |y| + \int_0^{t\wedge\sigma_r^y} Y_s^2 dB_s$$

である。ここで $r \to 0$ とすれば、定理 4.20 (1) (b) より ($\mathbf{P}$-a.s. に) $\sigma_r^y \to \infty$ であるから、任意の t に対して

$$Y_t = |y| + \int_0^t Y_s^2 dB_s$$

となることがわかる。以上より (B_t, Y_t) は確率微分方程式

$$dX_t = X_t^2 dB_t, \quad X_0 = x > 0$$

の弱い解となることがわかった。

練習問題 6.2. 命題 6.7 の証明を完成させよ。

解答.

練習問題 6.3. ノビコフの条件が成り立てば (6.4) が成り立つ、ということを確かめよ。

解答. $0 < \varepsilon < 1$ とする。$\frac{1}{1-\varepsilon} > 1$ なのでヘルダーの不等式より、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\int_0^T |a_t|^2 dt\right)\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |a_t|^2 dt\right)\right]
\end{aligned}$$

となる。従ってとくに

$$\begin{aligned}
1 &\leq \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\int_0^T |a_t|^2 dt\right)\right]\right)^{\varepsilon} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |a_t|^2 dt\right)\right]\right)^{\varepsilon(1-\varepsilon)} \\
&\to 1, \quad (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

である。これは (6.4) が成立することを示している。

練習問題 6.4.

- $T > 0$,
- $\sigma = (\sigma_\alpha^i(x))_{1\leq i\leq N, 1\leq\alpha\leq d} \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N\times d})$,
- $b = (b^i)_{1\leq i\leq N}^\dagger \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$,
- $f_1, \cdots, f_d \in C(\mathbb{R}^N)$：局所リプシッツ連続な関数たち、
- $\hat{b}^i \overset{\text{def}}{:=} b^i - \sum_{\alpha=1}^d f_\alpha \sigma_\alpha^i, \hat{b} = (\hat{b}^1, \cdots, \hat{b}^N)$,
- $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$：コンパクト台を持つ C^∞-級関数で、$|x| \leq n$ ならば $\varphi_n(x) = 1$ となるもの、

- $\sigma^{(n)} :\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_n \sigma, b^{(n)} :\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_n b,$
- $\{B_t, Y_t\}$：次の確率微分方程式の弱い解：

$$dY_t = \sigma(Y_t)dB_t + \hat{b}(Y_t)dt, \quad Y_0 = y.$$

- $X_t^{(n)}$：次の確率微分方程式の解：

$$dX_t^{(n)} = \sigma^{(n)}(X_t^{(n)})dB_t + b^{(n)}(X_t^{(n)})dt, \quad X_0^{(n)} = y.$$

- $M_t :\stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^d \int_0^t f_\alpha(Y_s)dB_s^\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^d \int_0^t f_\alpha^2(Y_s)ds\right),$
- $\tau_n :\stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{t \geq 0 \middle| |X_t^{(n)}| \geq n\right\}, \tau :\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \tau_n,$

とする。このとき

$$\mathbf{P}(\tau > T) = \mathbb{E}[M_T]$$

を示せ。

解答. はじめに注意：$a_t^\alpha :\stackrel{\text{def}}{=} f_\alpha(Y_t)$ とおいてもこれはギルザノフの定理 (定理 6.13) の仮定を満たさないかもしれない。なので M_t がマルチンゲールになるかどうかはわからない。あと、本文中では f_α たちに局所リプシッツ性は仮定されていなかったが、これがないと Y_t の一意性が従わないかもしれないので、問題として破綻すると思われる。ここでは f_α は局所リプシッツ連続であるとして本問題に解答する。

次のように定義しておく：

- $f_\alpha^{(n)} :\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_n f_\alpha, \hat{b}^{(n),i} :\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_n \hat{b}^i = b^{(n),i} - \sum_{\alpha=1}^d f_\alpha^{(n)} \sigma_\alpha^{(n),i},$
- $Y_t^{(n)}$ を次の確率微分方程式の解とする：

$$dY_t^{(n)} = \sigma^{(n)}(Y_t^{(n)}) + \hat{b}^{(n)}(Y_t^{(n)})dt, \quad Y_0^{(n)} = y.$$

このとき $f_\alpha^{(n)}(Y_t^{(n)})$ は ω によらずある定数でおさえることのできる有界な確率過程であるから、$a_t^\alpha :\stackrel{\text{def}}{=} f_\alpha^{(n)}(Y_t^{(n)})$ とおけばこれはギルザノフの定理 (定理 6.13) の仮定を満たす。
- $M_t^{(n)} :\stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^d \int_0^t f_\alpha^{(n)}(Y_s^{(n)})dB_s^\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^d \left(f_\alpha^{(n)}(Y_s^{(n)})\right)^2 ds\right)$, これはギルザノフの定理 (定理 6.13) よりマルチンゲールである。
- $\hat{\mathbf{P}}^{(n)}$ を $\hat{\mathbf{P}}^{(n)}(A) :\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[M_T^{(n)}; A\right]$ で定義される確率測度とする。
- $\hat{B}_t^{(n),\alpha}$ を次で定義される確率過程とする：

$$d\hat{B}_t^{(n),\alpha} = dB_t^\alpha - f_\alpha^{(n)}(Y_t^{(n)})dt, \quad \hat{B}_0^{(n)} = 0.$$

ギルザノフの定理 (定理 6.13) より、$\hat{B}_t^{(n)}$ は $\hat{\mathbf{P}}^{(n)}$ についてのブラウン運動であり、さらに $Y_t^{(n)}$ は次の確率微分方程式の解となる：

$$dY_t^{(n)} = \sigma^{(n)}(Y_t^{(n)})d\hat{B}_t^{(n)} + b^{(n)}(Y_t^{(n)})dt, \quad Y_0^{(n)} = y.$$

- $\rho_n :\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 ||Y_t| \geq n\}$, 極限 $n \to \infty$ において $\rho_n \to \infty$ となることに注意。

二つのステップに分けて証明する。各ステップで次のことを証明する：

Step 1: **P**-a.s. に

$$X^{(n)}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m} = X^{(m)}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}, Y^{(n)}_{t\wedge\rho_n} = Y_{t\wedge\rho_n}$$

であることを示す。これは定理 5.7 の証明の前半部分とほとんど全く (X の方は完全に) 同じ方法で示せる。とくに τ_n は **P**-a.s. に単調増加であり、ρ_n は **P**-a.s. に

$$\rho_n = \inf\left\{t \geq 0 \middle| |Y^{(n)}_t| \geq n\right\}$$

となる。

Step 2: ギルザノフの定理を使って $\mathbf{P}(\tau_n > T) = \mathbb{E}\left[M^{(n)}_T; \{\rho_n > T\}\right]$ を示す。最後に $n \to \infty$ として求める結果を得る。

Step 1を実行する。n, m を任意にとる。σ, b は C^∞-級であるから、局所リプシッツ条件を満たす。従って、定理 5.6 の記号を使って、ある $K_{T,n\vee m}$ が存在して任意の $|x|, |y| \leq n \vee m$ となる $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| + |b(x) - b(y)| \leq K_{n\vee m}|x - y|$$

となる。τ_n の定義から、$0 \leq s \leq \tau_n$ であれば $|X^{(n)}_s| \leq n$ であり、また $|x| \leq n$ であるときは $\sigma^{(n)}(x) = \sigma(x), b^{(n)}(x) = b(x)$ なので、$X^{(n)}_s$ が確率微分方程式

$$dX^{(n)}_t = \sigma^{(n)}(X^{(n)}_t)dB_t + b^{(n)}(X^{(n)}_t)dt, \quad X^{(n)}_0 = y.$$

の解であることから、**P**-a.s. に

$$X^{(n)}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m} = y + \int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m} \sigma(X^{(n)}_s)dB_s + \int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m} b(X^{(n)}_s)ds$$

が成り立つ。従って、任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|X^{(n)}_{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m} - X^{(m)}_{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\right|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\sigma(X^{(n)}_u) - \sigma(X^{(m)}_u)\right)dB_u + \int_0^{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(b(X^{(n)}_u) - b(X^{(m)}_u)\right)du\right|^2\right] \\
&\overset{\bigstar}{\leq} 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\sigma(X^{(n)}_u) - \sigma(X^{(m)}_u)\right)dB_u\right|^2\right] \\
&\qquad + 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(b(X^{(n)}_u) - b(X^{(m)}_u)\right)du\right|^2\right] \\
&\overset{\spadesuit}{\leq} 8\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N\left|\sum_{\alpha=1}^d\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\sigma^i_\alpha(X^{(n)}_s) - \sigma^i_\alpha(X^{(m)}_s)\right)dB^\alpha_s\right|^2\right] \\
&\qquad + 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(b(X^{(n)}_u) - b(X^{(m)}_u)\right)du\right|^2\right] \\
&\overset{\clubsuit}{\leq} 8\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N\left(\sum_{\alpha=1}^d\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\sigma^i_\alpha(X^{(n)}_s) - \sigma^i_\alpha(X^{(m)}_s)\right)dB^\alpha_s\right)^2\right] \\
&\qquad + 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} s\int_0^{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left|b(X^{(n)}_u) - b(X^{(m)}_u)\right|^2 du\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\heartsuit}{\le} 8\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\sigma_\alpha^i(X_s^{(n)})-\sigma_\alpha^i(X_s^{(m)})\right)^2 ds\right] \\
&\qquad + 2T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left|b(X_u^{(n)})-b(X_u^{(m)})\right|^2 ds\right] \\
&\le 8\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\left\|\sigma(X_s^{(n)})-\sigma(X_s^{(m)})\right\|^2+\left|b(X_s^{(n)})-b(X_s^{(m)}\right|^2\right)ds\right] \\
&\qquad + 2T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\left\|\sigma(X_s^{(n)})-\sigma(X_s^{(m)})\right\|^2+\left|b(X_s^{(n)})-b(X_s^{(m)}\right|^2\right)ds\right] \\
&= 2(4+T)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left(\left\|\sigma(X_s^{(n)})-\sigma(X_s^{(m)})\right\|^2+\left|b(X_s^{(n)})-b(X_s^{(m)}\right|^2\right)ds\right] \\
&\overset{\diamondsuit}{\le} 2(4+T)K_{n\vee m}^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}\left|X_s^{(n)}-X_s^{(m)}\right|^2 ds\right] \\
&\le 2(4+T)K_{n\vee m}^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t}\left|X_{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(n)}-X_{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(m)}\right|^2 ds\right] \\
&= 2(4+T)K_{n\vee m}^2\int_0^{t}\mathbb{E}\left[\left|X_{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(n)}-X_{s\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(m)}\right|^2\right] ds \\
&\le 2(4+T)K_{n\vee m}^2\int_0^{t}\mathbb{E}\left[\sup_{u\le s}\left|X_{u\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(n)}-X_{u\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(m)}\right|^2\right] ds
\end{aligned}
$$

となる。ただしここで $\bigstar$ の箇所は任意の実数 a,b に対して $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$ となることを用い、$\spadesuit$ の箇所は第一項に $p=2$ の場合の Doob の不等式を用い、$\clubsuit$ の箇所は第二項にヘルダーの不等式 (例 1.14 参照) を用い、$\heartsuit$ の箇所は第一項に伊藤積分の等長性を用い、$\diamondsuit$ の箇所は局所リプシッツ条件を用いた。この不等式評価とグロンウォールの不等式より、

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|X_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(n)}-X_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(m)}\right|^2\right]=0
$$

を得る。以上より、任意の $t\in[0,T]$ に対して $\mathbf{P}$-a.s. に $X_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(n)}=X_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_m}^{(m)}$ であることがわかった。

Y の方の不等式評価を行う。f_α は局所リプシッツ連続であり、φ_n は C^∞-級であるから、$\sigma,\hat{b}$ や各 l に対する $\sigma^{(l)},\hat{b}^{(l)}$ は局所リプシッツ条件を満たす、つまり従って、任意の $|x|,|y|\le n$ となる $x,y\in\mathbb{R}^N$ に対し、ある定数 $\hat{K}_n$ が存在し、

$$
\|\sigma^{(n)}(x)-\sigma^{(n)}(y)\|+|\hat{b}^{(n)}(x)-\hat{b}^{(n)}(y)|\le\hat{K}_n|x-y|
$$

となる。ρ_n の定義から、$0\le s\le\tau_n$ であれば $|Y_s|\le n$ であり、また $|x|\le n$ であるときは $\sigma^{(n)}(x)=\sigma(x),\hat{b}^{(n)}(x)=\hat{b}(x)$ なので、Y_s が確率微分方程式

$$
dY_t=\sigma(Y_t)dB_t+\hat{b}(Y_t)dt,\quad Y_0=y.
$$

の解であることから、$\mathbf{P}$-a.s. に

$$
Y_{t\wedge\rho_n}=y+\int_0^{t\wedge\rho_n}\sigma^{(n)}(Y_s)dB_s+\int_0^{t\wedge\rho_n}\hat{b}^{(n)}(Y_s)ds
$$

が成り立つ。従って、任意の $t \in [0,T]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|Y_{s\wedge\rho_n}-Y^{(n)}_{s\wedge\rho_n}\right|^2\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\rho_n}\left(\sigma^{(n)}(Y_u)-\sigma^{(n)}(Y^{(n)}_u)\right)dB_u+\int_0^{s\wedge\rho_n}\left(\hat{b}^{(n)}(Y_u)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_u)\right)du\right|^2\right]\\
&\overset{\bigstar}{\le} 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\rho_n}\left(\sigma^{(n)}(Y_u)-\sigma^{(n)}(Y^{(n)}_u)\right)dB_u\right|^2\right]\\
&\qquad+2\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\rho_n}\left(\hat{b}^{(n)}(Y_u)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_u)\right)du\right|^2\right]\\
&\overset{\spadesuit}{\le} 8\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N\left(\sum_{\alpha=1}^d\int_0^{t\wedge\rho_n}\left(\sigma^{(n),i}_\alpha(Y_s)-\sigma^{(n),i}_\alpha(Y^{(n)}_s)\right)dB^\alpha_s\right)^2\right]\\
&\qquad+2\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\rho_n}\left(\hat{b}^{(n)}(Y_u)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_u)\right)du\right|^2\right]\\
&\overset{\clubsuit}{\le} 8\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N\left(\sum_{\alpha=1}^d\int_0^{t\wedge\rho_n}\left(\sigma^{(n),i}_\alpha(Y_s)-\sigma^{(n),i}_\alpha(Y^{(n)}_s)\right)dB^\alpha_s\right)^2\right]\\
&\qquad+2\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}s\int_0^{s\wedge\rho_n}\left|\hat{b}^{(n)}(Y_u)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_u)\right|^2du\right]\\
&\overset{\heartsuit}{\le} 8\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N\sum_{\alpha=1}^d\int_0^{t\wedge\rho_n}\left(\sigma^{(n),i}_\alpha(Y_s)-\sigma^{(n),i}_\alpha(Y^{(n)}_s)\right)^2ds\right]\\
&\qquad+2T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\rho_n}\left|\hat{b}^{(n)}(Y_s)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_s)\right|^2ds\right]\\
&\le 8\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\rho_n}\left(\left\|\sigma^{(n)}(Y_s)-\sigma^{(n)}(Y^{(n)}_s)\right\|^2+\left|\hat{b}^{(n)}(Y_s)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_s)\right|^2\right)ds\right]\\
&\qquad+2T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\rho_n}\left(\left\|\sigma^{(n)}(Y_s)-\sigma^{(n)}(Y^{(n)}_s)\right\|^2+\left|\hat{b}^{(n)}(Y_s)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_s)\right|^2\right)ds\right]\\
&=2(4+T)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\rho_n}\left(\left\|\sigma^{(n)}(Y_s)-\sigma^{(n)}(Y^{(n)}_s)\right\|^2+\left|\hat{b}^{(n)}(Y_s)-\hat{b}^{(n)}(Y^{(n)}_s)\right|^2\right)ds\right]\\
&\overset{\diamondsuit}{\le} 2(4+T)\hat{K}_n^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\rho_n}\left|Y_s-Y^{(n)}_s\right|^2ds\right]\\
&\le 2(4+T)\hat{K}_n^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t}\left|Y_{s\wedge\rho_n}-Y^{(n)}_{s\wedge\rho_n}\right|^2ds\right]\\
&=2(4+T)\hat{K}_n^2\int_0^t\mathbb{E}\left[\left|Y_{s\wedge\rho_n}-Y^{(n)}_{s\wedge\rho_n}\right|^2\right]ds\\
&\le 2(4+T)\hat{K}_n^2\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{u\le s}\left|Y_{u\wedge\rho_n}-Y^{(n)}_{u\wedge\rho_n}\right|^2\right]ds
\end{aligned}
$$

となる。ただしここで $\bigstar$ の箇所は任意の実数 a,b に対して $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$ となることを用い、$\spadesuit$ の箇所は第一項に $p=2$ の場合の Doob の不等式を用い、$\clubsuit$ の箇所は第二項にヘルダーの不等式 (例 1.14 参照) を用い、$\heartsuit$ の箇所は第一項に伊藤積分の等長性を用い、$\diamondsuit$ の箇所は局所リプシッツ条件を用いた。この不等式評

価とグロンウォールの不等式より、

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|Y_{t\wedge\rho_n}-Y^{(n)}_{t\wedge\rho_n}\right|^2\right]=0$$

を得る。以上より、任意の $t\in[0,T]$ に対して $\mathbf{P}$-a.s. に $Y_{t\wedge\rho_n}=Y^{(n)}_{t\wedge\rho_n}$ であることがわかった。以上で Step 1 を完了する。

Step 2を実行する。$\left\{\mathbf{P},B_t,X^{(n)}_t\right\}$ と $\left\{\hat{\mathbf{P}},\hat{B}^{(n)}_t,Y^{(n)}_t\right\}$ は同じ確率微分方程式の弱い解である。$\sigma^{(n)},b^{(n)}$ は局所リプシッツ条件を満たすので、弱い解は一意的である (練習問題 6.2の証明を参照)。特に

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X^{(n)}_t|<n\right)=\hat{\mathbf{P}}^{(n)}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y^{(n)}_t|<n\right)$$

が成り立つ。Step 1 より、$\mathbf{P}$-a.s. に

$$\rho_n=\inf\left\{t\ge 0\middle||Y^{(n)}_t|\ge n\right\}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tau_n>T)&=\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X^{(n)}_t|<n\right)\\&=\hat{\mathbf{P}}^{(n)}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y^{(n)}_t|<n\right)\\&=\hat{\mathbf{P}}^{(n)}(\rho_n>T)\\&=\mathbb{E}\left[M_T;\{\rho_n>T\}\right]\\&\to\mathbb{E}\left[M_T\right],\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

となる。また、Step 1 より τ_n は $\mathbf{P}$-a.s. に単調増加であるから、

$$\{\tau>T\}=\bigcap_{n\ge 0}\{\tau_n>T\}$$

である。従って

$$\mathbf{P}(\tau_n>T)\to\mathbf{P}(\tau>T),\quad(n\to\infty)$$

であり、以上より

$$\mathbf{P}(\tau>T)=\mathbb{E}\left[M_T\right]$$

を得る。

練習問題 6.5. $r>0, f\in C^\infty_b(\mathbb{R})$ とする。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)-x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)-ru,\quad u(0,x)=f(x),\quad((t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}),$$

の有界な解を具体的に求めよ。

解答. まず $v(t,x) :\overset{\mathrm{def}}{=} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)u(t,x)$ とおく。このとき

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right)u(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \\
&= -x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)u(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \\
&= -xv(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(xv(t,x)\right) + \frac{d}{dx}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\
&= -v(t,x) - x\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) - x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\
&= -v(t,x) - x\left(-xv(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) \\
&\qquad - x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\
&= -v(t,x) + x^2 v(t,x) - 2x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\
&= -v(t,x) + x^2 v(t,x) + 2\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) \\
&= -v(t,x) + x^2 v(t,x) + 2\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + ru(t,x)\right) \\
&= -v(t,x) + x^2 v(t,x) + 2\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + 2rv(t,x) \\
&= -\left(1 - x^2 + 2r\right)v(t,x) + 2\frac{\partial v}{\partial t}(t,x),
\end{aligned}
$$

となるので、$v(t,x)$ は次の偏微分方程式を満たす：

$$
\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1-x^2+2r}{2}v(t,x), \quad v(0,x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}u(0,x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}f(x).
$$

そこで $d = N = 1, V_1 = 1, V_0 = 0, \Theta_1 = 0, U(x) = \frac{1-x^2+2r}{2}$ とおいて X_t^x を確率微分方程式

$$
dX_t = \sum_{\alpha} V_\alpha(X_t)\circ dB_t^\alpha + V_0(X_t)dt, dB_t \quad X_0 = x,
$$

の解とすると、$X_t^x = B_t + x$ であるから、ファインマン-カッツの定理 (定理 6.22) より

$$
\begin{aligned}
v(t,x) &= \mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}(B_t+x)^2}f(B_t+x)\exp\left(\int_0^t \frac{1}{2}\left(1-(B_s+x)^2+2r\right)ds\right)\right] \\
&= e^{\frac{1+2r}{2}t}\mathbb{E}\left[f(B_t+x)\exp\left(-\frac{1}{2}(B_t+x)^2 - \frac{1}{2}\int_0^t (B_s+x)^2 ds\right)\right]
\end{aligned}
$$

となる。従って、

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= e^{\frac{1}{2}x^2}v(t,x) \\
&= e^{\frac{1+2r}{2}t}\mathbb{E}\left[f(B_t+x)\exp\left(-\frac{1}{2}(B_t)^2 - xB_t - \frac{1}{2}\int_0^t (B_s+x)^2 ds\right)\right]
\end{aligned}
$$

となる。

練習問題 6.6.

- $\sigma = \left(\sigma^i_\alpha(x)\right)_{1\le i\le N, 1\le\alpha\le d} \in C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N\times d})$,
- $b = (b^1, \cdots, b^N)^\dagger \in C(\mathbb{R}^N)$,
- $a^{ij} \overset{\text{def}}{:=} \sum_{\alpha=1}^d \sigma^i_\alpha \sigma^j_\alpha$,
- $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^N b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ を $\mathbb{R}^N$ 上の微分作用素、
- B^x_t, X^x_t を次の確率微分方程式の弱い解とする：

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = x.$$

- τ^x を次で定義される停止時刻とする：

$$\tau^x \overset{\text{def}}{:=} \inf\left\{t \ge 0 \middle| X^(_t x) \notin D\right\}.$$

- $g \in C(\bar{D})$ を連続関数で次を満たすとする：

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^x} |g(X^x_t)|dt\right] < \infty, \quad (\forall x \in D).$$

- $f \in C(\partial D)$ を連続関数、

とする。さらに $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ は次を満たすとする：

$$\mathcal{L}u(x) = g(x), \quad (\forall x \in D), \quad u|_{\partial D} = f.$$

このとき、上を満たす有界な u は

$$u(x) = \mathbb{E}\left[f(X^x_{\tau^x}) - \int_0^{\tau^x} g(X^x_t)dt\right]$$

と表現できることを示せ。

解答. 定理 6.26 と同じ。$\mathbf{P}(\tau^x < \infty) = 1$ という条件が必要だと思われる。
次のように定義する：

- $z \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$d(z, \partial D) \overset{\text{def}}{:=} \inf\left\{|z-y| \middle| y \in \partial D\right\},$$

- $D_n \overset{\text{def}}{:=} \left\{z \in D \middle| |z| < n, d(z, \partial D) > \frac{1}{n}\right\}$ とおく。このとき $D_1 \subset D_2 \subset \cdots, D = \bigcup_{n\ge 0} D_n$ である。
- $x \in D_m$ となる $m \gg 0$ を選んで、$n \ge m$ に対して

$$\tau^x_n \overset{\text{def}}{:=} \inf\left\{t \ge 0 \middle| X^(_t x) \notin D_n\right\}$$

と停止時刻を定める。本文中にある通り、τ^x_n は停止時刻であり、τ^x はその極限であるから τ^x もまた停止時刻となる。

$\bar{D}_n$ は有界閉集合なので、コンパクトである。従って、$\bar{D}_n$ 上で $u_n = u$ となる $u_n \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ が存在する。$\bar{D}_n$ 上では $u_n = u$ かつ $\mathcal{L}u_n(x) = \mathcal{L}u(x) = g(x)$ である。$d\left(u(X_t)\right)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
dX_t^i dX_t^j &= \left(\sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t) dB_t^{x,\alpha}\right)\left(\sum_{\beta=1}^{d} \sigma_\beta^j(X_t) dB_t^{x,\beta}\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\sigma_\beta^j(X_t) dB_t^{x,\alpha} dB_t^{x,\beta} \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\sigma_\beta^j(X_t)\delta^{\alpha\beta} dt \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\sigma_\alpha^j(X_t) dt
\end{aligned}$$

となるので、伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
d\left(u(X_t)\right) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x^i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(X_t) dX_t^i dX_t^j \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\frac{\partial u}{\partial x^i}(X_t) dB_t^{x,\alpha} + \sum_{i=1}^{N} b^i(X_t)\frac{\partial u}{\partial x^i}(X_t) dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\sigma_\alpha^j(X_t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(X_t) dt \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\frac{\partial u}{\partial x^i}(X_t) dB_t^{x,\alpha} + \sum_{i=1}^{N} b^i(X_t)\frac{\partial u}{\partial x^i}(X_t) dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d} a^{ij}(X_t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(X_t) dt \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\frac{\partial u}{\partial x^i}(X_t) dB_t^{x,\alpha} + \mathcal{L}u(X_t) dt \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(X_t)\frac{\partial u}{\partial x^i}(X_t) dB_t^{x,\alpha} + g(X_t) dt
\end{aligned}$$

であるから、$\bar{D}_n$ 上では

$$u(X_{t\wedge\tau_n^x}^x) = u(x) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{t\wedge\tau_n^x} \sigma_\alpha^i(X_s)\frac{\partial u}{\partial x^i}(X_s) dB_s^{x,\alpha} + \int_0^{t\wedge\tau_n^x} g(X_s) ds$$

となることがわかる。u_n は $\mathbb{R}^N$ 全体で定義された二階微分が連続な有界な関数であり、σ_α^i は連続、とくに $\bar{D}_n$ 上で有界であるから $\sigma_\alpha^i \frac{\partial u_n}{\partial x^i}$ は $\bar{D}_n$ 上で有界であり、とくに $\sigma_\alpha^i \frac{\partial u_n}{\partial x^i} \in \mathcal{L}^2$ である。従って上式の右辺第二項はマルチンゲールであり、期待値をとれば、$x \in D_n$ に対して

$$\mathbb{E}\left[u(X_{t\wedge\tau_n^x}^x)\right] = u(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n^x} g(X_s) ds\right]$$

となる。$n \to \infty$ とすれば、$x \in D$ と $t \geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}\left[u(X_{t\wedge\tau^x}^x)\right] = u(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau^x} g(X_s) ds\right]$$

を得る。さらに $t \to \infty$ とすることで、$\mathbf{P}(\tau^x < \infty) = 1$ より

$$\mathbb{E}\left[u(X_{\tau^x}^x)\right] = u(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^x} g(X_t) dt\right]$$

を得る。τ^x の定義より $X^x_{\tau^x} \in \partial D$ であるから、$u(X^x_{\tau^x}) = f(X^x_{\tau^x})$ であり、従って

$$u(x) = \mathbb{E}\left[f(X^x_{\tau^x}) - \int_0^{\tau^x} g(X_t)dt\right]$$

を得る。これは所望の等式である。

練習問題 6.7. $D \subset \mathbb{R}^N$ をコンパクト集合とする。$u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ が D 上 $\Delta u = 0$ を満たすとする。このとき

$$\max_{x \in \bar{D}} u(x) \leq \max_{x \in \partial D} u(x)$$

となることを示せ。

解答. $d = N, \sigma^i_\alpha = \delta^i_\alpha, b = 0$ とした場合の確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = x,$$

の解は $X_t = B_t + x$ である。このとき $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta$ であり、さらに停止時刻 τ^x は定理 4.20 より $\mathbf{P}(\tau^x < \infty) = 1$ を満たす。

$f(y) :\overset{\text{def}}{=} u(y), (y \in \partial D)$ と定義すると、u は偏微分方程式

$$\mathcal{L}u(x) = 0, \quad (x \in D), \quad u|_{\partial D} = f,$$

の有界な解であるから、定理 6.26 より $u(x) = \mathbb{E}\left[f(X^x_{\tau^x})\right]$ と表示できる。任意の $y \in \partial D$ に対して $f(y) \leq \max_{x \in \partial D} f(x)$ であるから、とくに

$$f(X^x_{\tau^x}) \leq \max_{x \in \partial D} f(x)$$

であり、従って

$$u(x) = \mathbb{E}\left[f(X^x_{\tau^x})\right] \leq \mathbb{E}\left[\max_{x \in \partial D} f(x)\right] = \max_{x \in \partial D} f(x)$$

が成り立つ。左辺の max を取れば所望の不等式を得る。

練習問題 6.8.

- $D :\overset{\text{def}}{=} \left\{(x_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3^2 + x_4^2 < 1\right\}$,
- $D_0 :\overset{\text{def}}{=} \left\{(x_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}$,
- $B :\overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^4 \middle| |x| < 2\right\}$,

とする。B 上で $\Delta u = 0$ を満たす $u \in C^2(B)$ に対して

$$\max_{x \in \bar{D}} u(x) \leq \max_{x \in D_0} u(x)$$

を示せ。

とくに $f \in C(\partial D)$ が D_0 以外で最大値をとるならば、$\bar{D}$ を含む開集合 D' 上で $\Delta u = 0$ であり、さらに $u|_{\partial D} = f$ となるような $u \in C^2(D')$ は存在しないことを確かめよ。

解答.

7 経路空間での微積分学

練習問題 7.1. γ, δ が $[0, \infty)$ 上の C^1-級関数であり、T が十分小さいとすると、条件 (A.1) が成り立つことを示せ。

解答.

練習問題 7.2. $\gamma(t) = 0, \delta(t) = \delta(0), (\forall t \leq T)$ と仮定する。$B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対し、$c(B) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} B^n$ と定義する。

(1) $A(t) = c(\delta(0)(T-t)^2), (t \leq T)$ となることを示せ。

(2) $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ を $\delta(0)$ の固有値とするとき、

$$\det A(t) = \prod_{\alpha=1}^{d} \cos\left(\sqrt{\lambda_\alpha}(t-T)\right)$$

となることを示せ。

(3) $\max_{\alpha=1,\cdots,d} \lambda_\alpha < \frac{\pi^2}{4T^2}$ となるとき、(A.1) が成り立つことを示せ。

解答. (1) は本文では $A(t) = c(\delta(0)(T-t))$ を示せ、となっていたけど、これは 2 乗が抜けてるんじゃないかと思う。(2) と比較してもそんな感じがする。

(1)。$\gamma(t) = 0$ と $\delta(t) = \delta(0)$ から、与えられた微分方程式は

$$A''(t) = -\delta(0)A(t)$$

と書ける。従って、$A(t)$ は C^∞-級であり、T のまわりでテイラー展開すると、

$$A(t) = A(T + (t-T)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(T)(t-T)^n$$

となる。ここで $A^{(n)}(t)$ は $A(t)$ の n 階導関数である。

$$\begin{aligned} A^{(2n)}(T) &= -\delta(0)A^{(2(n-1))}(T) = \cdots = (-1)^n \delta(0)^n A(T) &= (-1)^n \delta(0)^n, \\ A^{(2n+1)}(T) &= -\delta(0)A^{(2n-1)}(T) \quad = \cdots = (-1)^n \delta(0)^n A'(T) &= 0, \end{aligned}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(T)(t-T)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} A^{(2n)}(T)(t-T)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n \delta(0)^n (t-T)^{2n} \\ &= c(\delta(0)(T-t)^2) \end{aligned}$$

を得る。これは所望の結果である。

(2)。$\delta(0)$ は (重複込みで) ちょうど d 個の固有値を持つので上三角化可能である。$D :\overset{\mathrm{def}}{=} P\delta(0)P^{-1}$ が上三角行列となるように P をとれば、

$$c(\delta(0)(T-t)^2) = c(P^{-1}DP(T-t)^2) = P^{-1}c(D(T-t)^2)P$$

となる。各 D^n の対角成分が $\lambda_1^n, \cdots, \lambda_d^n$ であることから、$c(D(T-t)^2)$ の対角成分は

$$\cos(\sqrt{\lambda_1}(t-T)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\lambda_1^n(T-t)^2, \ \cdots\ , \cos(\sqrt{\lambda_d}(t-T)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\lambda_d^n(T-t)^2$$

である。従って

$$\det A(t) = \det(P^{-1}c(D(T-t)^2)P) = \det c(D(T-t)^2) = \prod_{\alpha=1}^{d} \cos(\sqrt{\lambda_\alpha}(t-T))$$

となる。これは所望の結果である。

(3)。(2) の結果を見れば、各 cos が $\neq 0$ であれば良いが、それは条件より明らかである。

練習問題 7.3. $d=1$ とし、$\delta(t) < 0, (\forall t \leq T)$ を仮定する。このとき、$A''(t) \geq 0, (t \leq T)$ を示し、条件 (A.1) が成り立つことを示せ。

解答. $d=1$ なので、$\gamma^\dagger = -\gamma$ であることから $\gamma = 0$ となる。従って与えられた微分方程式は

$$A''(t) = -\delta(t)A(t)$$

である。ここで $\delta(t) < 0$ であるから、右辺の係数 $-\delta(t)$ は正である。$A(t) = 0$ となる $t \in [0,T]$ が存在すると仮定する。また $A(T) = I = 1 > 0$ であることから、$\alpha :\overset{\mathrm{def}}{=} \max\{t \in [0,T] | A(t) = 0\}$ とおけば、$\alpha < T$ である。このとき、すべての $s \in [\alpha, T]$ に対して $\delta(s)A(s) < 0$ である。$A'(T) = \frac{1}{2}\gamma(T) = 0$ であることに注意して、すべての $t \in (\alpha, T)$ に対して

$$A'(t) = A'(t) - A'(T) = \int_T^t A''(s)ds = \int_t^T \delta(s)A(s)ds < 0$$

となる。一方、$A(\alpha) = 0$ であるから、

$$1 = A(T) = A(T) - A(\alpha) = \int_\alpha^T A'(s)ds < 0$$

となり、これは矛盾である。よって $A(t) = 0$ となる点 t は存在しない。

練習問題 7.4. 伊藤の公式を用いて、補題 7.7 の等式を証明せよ。

解答. 補題 7.7 の等式の右辺の第二項の dt に関する積分の積分範囲に誤植がある。正しい積分範囲は 0 から T であると思われる。

$F(t) :\overset{\mathrm{def}}{=} \int_t^T \kappa(s)ds$ とおく。$F'(t) = -\kappa(t)$ である。$F(t)$ は行列で、その成分を $F(t)_{ij}$ のように書く。示すべき等式は

$$2\int_0^T \langle F(t)B_t, dB_t\rangle + \int_0^T \operatorname{tr} F(t)dt + \int_0^T \langle F'(t)B_t, B_t\rangle\, dt = 0$$

である。δ をクロネッカーのデルタとして、$\operatorname{tr} F(t) = F(t)_{ij}\delta^{ij}$ と $F(t) = F(t)^\dagger$ に注意して、内積を成分ごとに計算することで、

$$\int_0^T F(t)_{ij} B_t^i dB_t^j + \int_0^T F(t)_{ij} B_t^j dB_t^i + \int_0^T \left(F(t)_{ij}\delta^{ij} + F'(t)_{ij} B_t^i B_t^j \right) dt = 0$$

を示せば良い。ただし添字に関しては縮約記法を用いて和を取っている。$\delta^{ij} dt = dB_t^i dB_t^j$ に注意すると、伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
&F(t)_{ij} B_t^i dB_t^j + F(t)_{ij} B_t^j dB_t^i + F(t)_{ij}\delta^{ij} dt + F'(t)_{ij} B_t^i B_t^j dt \\
&= B_t^i B_t^j F'(t)_{ij} dt + F(t)_{ij} d(B_t^i B_t^j) \\
&= d\left(F(t)_{ij} B_t^i B_t^j \right)
\end{aligned}$$

となる。$\int_0^T$ で積分すると、

$$\begin{aligned}
&\int_0^T F(t)_{ij} B_t^i dB_t^j + \int_0^T F(t)_{ij} B_t^j dB_t^i + \int_0^T \left(F(t)_{ij}\delta^{ij} + F'(t)_{ij} B_t^i B_t^j \right) dt \\
&= \int_0^T d\left(F(t)_{ij} B_t^i B_t^j \right) \\
&= F(T)_{ij} B_T^i B_T^j - F(0)_{ij} B_0^i B_0^j
\end{aligned}$$

となる。$F(T) = \int_T^T \kappa(s) ds = 0$ と $B_0 = 0$ に注意すれば、この等式の右辺は 0 となり、所望の結果を得る。

練習問題 7.5. 定理 7.10 の証明中の $X_t^{(x,\eta)} = X_t^{\xi_t^{(x,\eta)}}$ が確率微分方程式 (7.11) の解となることを確かめよ。

解答.

練習問題 7.6. B_t を d 次元ブラウン運動とする。$B_T \sim N(0, TI)$ となることを用いて系 7.12 の等式を証明せよ。

解答. $\alpha = 1$ で証明すれば良い。x_1 で部分積分をすることで、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(B_T) \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi T)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d (x^i)^2} d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{(2\pi T)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\left[f(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d (x^i)^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^1 f(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d (x^i)^2} dx^1 \right) dx^2 \cdots dx^d \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{(2\pi T)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} x^1 f(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d (x^i)^2} d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{T} \mathbb{E}\left[f(B_T) B_T^1 \right]
\end{aligned}$$

となる。これは所望の等式である。

練習問題 7.7. $V_0, \cdots, V_d \in C_d^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ の場合にも、$f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N), \xi \in \mathbb{R}^N$ に対して次が成り立つことを示せ：

$$\mathbb{E}\left[\langle \nabla f(X_t^x), J_T^x A_T^x \xi \rangle \right] = \mathbb{E}\left[f(X_t^x) \sum_{\alpha=1}^d \int_0^T \left\langle (J_t^x)^{-1} V_\alpha(X_t^x), \xi \right\rangle \right].$$

解答. 系 7.11 で $g=1$ (定数関数) とすれば、$V_0,\cdots,V_d\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ の場合が従う。$\varphi_n\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を $\varphi_n(x)=1,(|x|\le n)$ となるものとして、$V_\alpha^n(x):\overset{\mathrm{def}}{=}V_\alpha(x)\varphi(x)$ と定めると、$V_1^n,\cdots,V_d^n\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ であるから、

$$\mathbb{E}\left[\langle\nabla f(X_t^x),J_T^{n,x}A_T^{n,x}\xi\rangle\right]=\mathbb{E}\left[f(X_t^x)\sum_{\alpha=1}^d\int_0^T\left\langle(J_t^{n,x})^{-1}V_\alpha^n(X_t^x),\xi\right\rangle\right]$$

となる。ただし J^n,A^n はそれぞれ V^n に対する J,A である。$n\to\infty$ として有界収束定理を用いれば所望の結果を得る。